This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

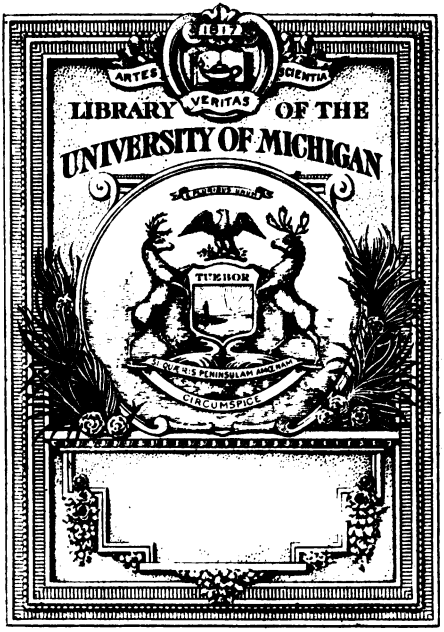
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

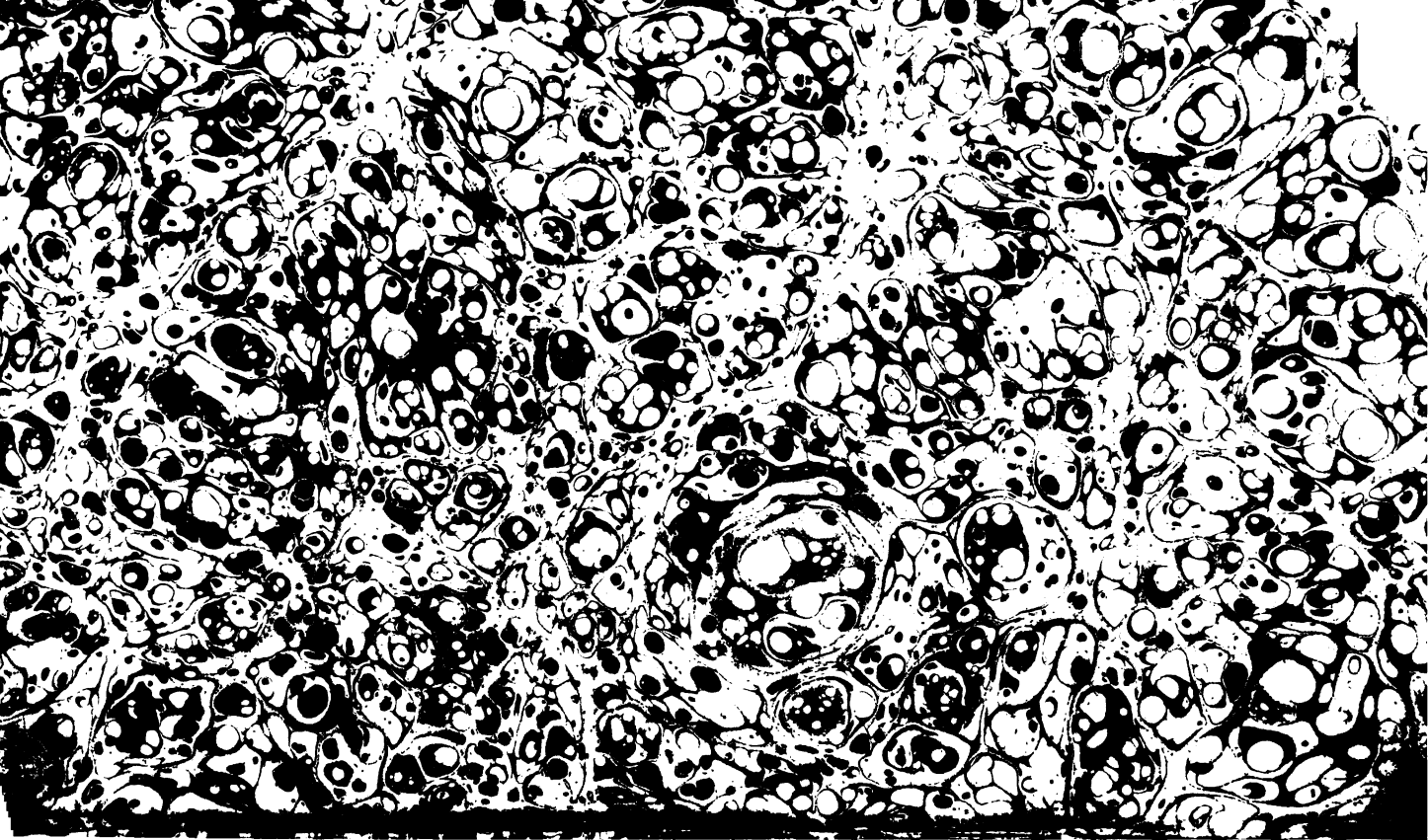
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

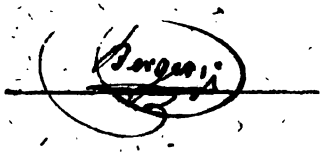
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Annex
QA
3
.S35

Anfangsgründe der Mathematik.



Zum Gebrauch auf Schulen und Universitäten herausgegeben

von

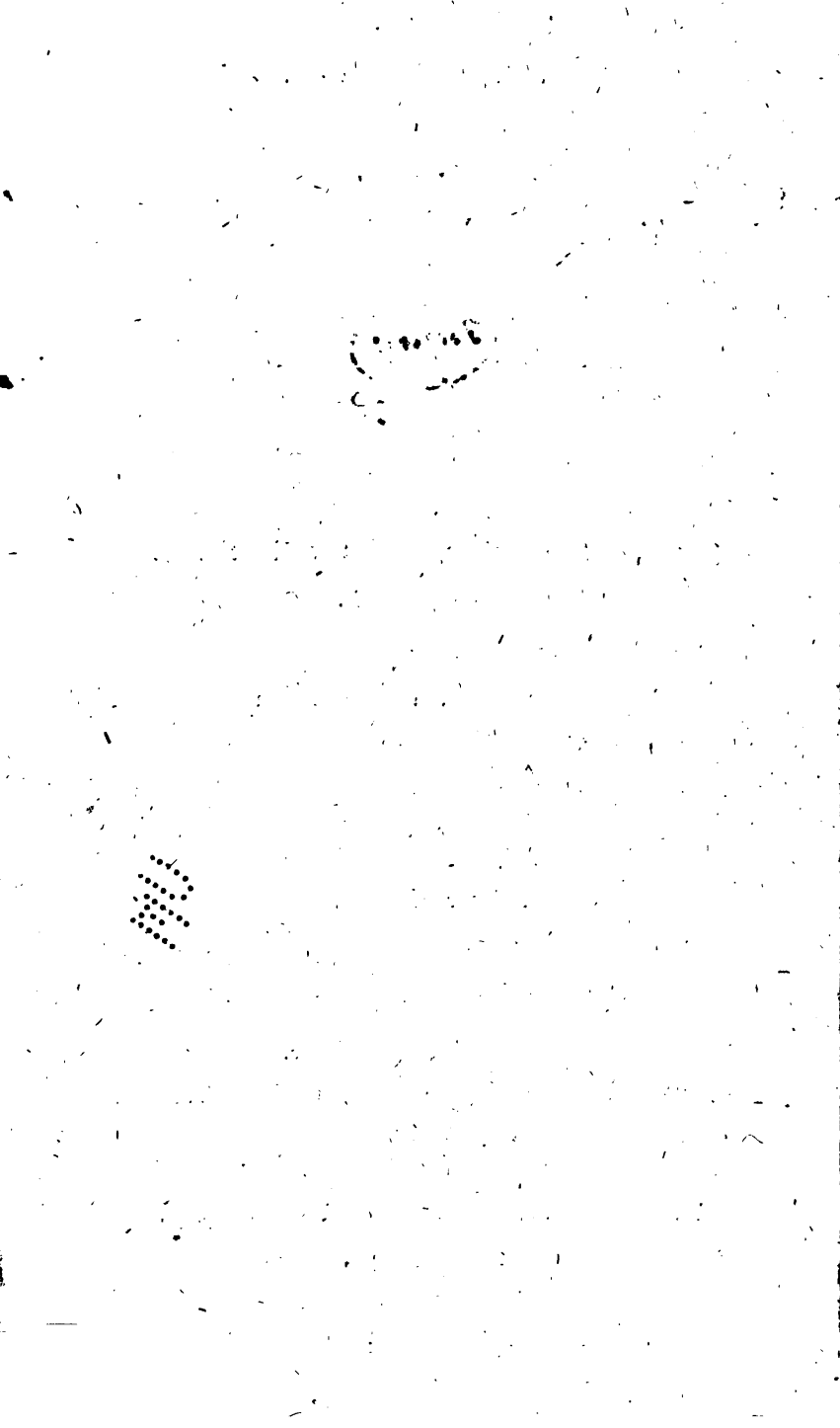
Georg Gottlieb Schmidt,
Professor der Mathematik zu Gießen.

Erster Theil.

Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Buchstabenrechenkunst.

Mit sechs Kupfertafeln.

Frankfurt am Mayn,
bey Varrentrapp und Wenner.
1797.



Vorrede.

Bey der großen Anzahl von deutschen Lehrbüchern der Mathematik, worunter einige Meisterwerke für alle aufgeklärte Nationen Muster des wissenschaftlichen Vortrags mathematischer Wahrheiten bleiben werden, würde ich es schwerlich gewagt haben mit diesen Anfangsgründen hervorzutreten, wenn ich nicht unlängst durch einen würdigen Gelehrten und Vorsteher eines Gymnasiums dazu wäre aufgefordert worden. Der Wunsch dieses Mannes, dessen Namen ich aus Bescheidenheit verschweige, gieng dahin: einen kurzen und faßlichen Unterricht in den mathematischen Wissenschaften, nach Art des zu seiner Zeit so allgemein beliebten Wolfischen Lehrbuches zu erhalten.

Ob ich seinen Wunsch erfüllet, und den mir vorgesetzten Zweck einigermaßen erreicht habe, überlasse ich der Entscheidung der Kenner. Ich bemerke jedoch hierbey folgendes, ohne das man schwerlich ein richtiges Urtheil von diesem Lehrbuche fällen würde. Die Erfahrung hat mich überzeugt, daß nicht nur solche, welche sogleich von Schulen zu ihrer künftigen Bestimmung gehen, sondern auch der größte Theil derjenigen, welche einen academischen Unterricht empfangen, sich nicht gerne lang mit einem strengen wissenschaftlichen Vortrag der mathematischen Lehren be-

schäftigen, sondern lieber (leider! oft zu bald), zu denjenigen Anwendungen derselben forteilen, von welchen sie demnächst Nutzen zu ziehen hoffen. Dies ist der Grund, warum ich selbst die Lehren der reinen Mathematik stets mit Anwendungen verbunden vorgetragen habe. Die Buchstabenrechenkunst, welche bey dem gegenwärtigen Zustand der Mathematik selbst Anfänger nicht entbehren können, habe ich in diesem Theil zuletzt abgehandelt, weil ich sogleich den Nutzen zeigen wollte, welchen diese Wissenschaft bey Erfindung methematischer Wahrheiten gewähret. Ueberhaupt ist es meiner Ueberzeugung nach besser, wenn der Anfänger erst durch den Vortrag arithmetischer und geometrischer Wahrheiten geübt an die Erlernung dieser Zeichensprache geht, weil er sich sonst entweder an einen mechanischen Calcul gewöhnet, oder wohl ganz von einer Wissenschaft zurückgeschrekt wird, von welcher er noch keinen Gebrauch einsieht. Daß ich bey der Ausarbeitung dieser Anfangsgründe unsre besten Lehrbücher der Mathematik, und insbesondere das Klügelische, dessen ich mich bisher bey meinem academischen Vortrag der reinen Mathematik bediente, benutzt habe, wird man von selbst finden.

Der zweyte Theil welcher die angewandte Mathematik enthalten wird, soll, wenn mir der Himmel meine nicht sehr feste Gesundheit fristet, demnächst erscheinen.

Inhalt des ersten Theils.

Seite

Einleitung . . 1

Die Rechenkunst.

1ter Abschnitt. Von den Zahlen überhaupt, den ganzen Zahlen und den vier Species der Rechenkunst. . . 9

2ter Abschnitt. Von den Primzahlen den zusammengesetzten Zahlen und den Brüchen. . 33

3ter Abschnitt. Von den Decimalbrüchen. . 45

4ter Abschnitt. Von den Potenzen und der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln. 51

5ter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf die Regula de Tri, Interessen-Gesellschafts- und Alligationsrechnung. . 73

6ter Abschnitt. Von der arithmetischen und geometrischen Reihe und deren Anwendung auf die Lehre von den Logarithmen. . 94

Die Geometrie mit Anwendung auf das Feldmessen.

I. Erklärungen und Grundsätze. . 120

II. Von der Lage der geraden Linien gegen einander und der Lehre von den Parallellinien. 131

III. Gleichheit der Dreyecke und Folgerungen. . 137

IV. Aehnlichkeit der Figuren. . 156

V. Vergleichung der geradlinichten Figuren und Ausmessung derselben. . 176

VI. Vom Kreise. . . 214

Die Stereometrie oder Meßkunst der Körper.

	Seite.
I. Von der Lage der Ebenen.	255
II. Prismatische Körper.	263
III. Cylinder oder walzenförmige Körper.	272
IV. Pyramiden und Kegel.	282
V. Von der Kugel.	291
Die ebene Trigonometrie.	301
Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.	311
Auflösung der gleichschenklichten Dreyecke.	315
Allgemeine Auflösung der Dreyecke.	319
Die Buchstabenrechenkunst.	322
Rechnung mit Potenzen und Wurzelgrößen.	344
Anwendung der Buchstabenrechenkunst auf einige arithmetische Wahrheiten.	348
Anwendung der Buchstabenrechenkunst auf geometrische Wahrheiten.	357

Einleitung.

§. 1.

Die Mathematik (μαθημα, μαθησις, der griechische Name bedeutet blos Wissenschaft, Unterricht) ist die Wissenschaft von den Größen und ihrem Verhalten gegen einander.

Man theilet sie in die reine und angewandte Mathematik ein. Jene beschäftiget sich mit der Betrachtung der Größen an und für sich. Diese wendet die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenstände der Natur, oder auf Bedürfnisse und Beschäftigungen des menschlichen Lebens an.

Eine Größe heißt alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist.

Die folgende Betrachtung wird die Vorstellung von Größe deutlicher machen, und das eigentliche Gebiete der Mathematik näher bestimmen.

§. 2.

Alle Dinge, die wir ausser uns wahrnehmen (Körper), beziehen wir auf einen gewissen Ort, an dem sie sich befinden. Wir können uns also keinen Körper ohne einen Raum, den er ausfüllet, vorstellen; das ist, wir können uns keinen Körper ohne Ausdehnung oder Größe denken. In so fern sagt man, die Ausdehnung oder Größe sey eine wesentliche Eigenschaft der Ma-

terie oder der Körperwelt. Es ist aber sehr wohl möglich, sich einen Raum, der nicht mit Materie erfüllt ist, vorzustellen, wenn gleich ein solcher leerer Raum in der Körperwelt nicht gefunden werden sollte. Mit dieser Vorstellung des bloßen Raumes und den verschiedenen Ausdehnungen in demselben hat es die **Geometrie** oder Meßkunst zu thun.

Man denke sich von dem unbegränzten Raume, in dem wir uns alle Körper vorstellen, einen Theil von willkührlicher Gestalt und Größe von dem übrigen abgesondert, so erhält man den **geometrischen Körper**. Diese Vorstellung vom geometrischen Körper wird versinnlicht durch Anschauung physischer Körper, von deren Materie und den ihr zukommenden Eigenschaften man abstrahirt. Man kann sich in jedem geometrischen Körper drey Ausdehnungen nach drey ganz verschiedenen Gegenden denken. Sie heißen **Länge, Breite** und **Dicke**. Es ist ferner verstattet, sich mehrere geometrische Körper an, neben und über einander so vorzustellen, daß sie zusammen nur einen einzigen größern geometrischen Körper ausmachen. Denn jene Gränzen, welche den geometrischen Körper, oder den bestimmten Raum von dem unbestimmten, unbegränzten Raume absondern, sind nur eingebildet, und dürfen also der Vorstellung von dem ununterbrochenen Zusammenhange des Raumes nicht widersprechen. Wir können daher diesen Gränzen der geometrischen Körper nur eine Ausdehnung nach zwey verschiedenen Gegenden, **Länge** und **Breite**, zuschreiben. Hätten sie nur die mindeste Ausdehnung nach der dritten Gegend, so würden sie selbst schon Körper werden, welches dem unmittelbaren Zusammenhange zweyer an einander stoßenden geometrischen Körper widerspricht. Eine solche Gränze im körperlichen Raum nennt man eine **geometrische Fläche**, in Bezug auf den geometrischen Körper, welchen sie begränzt, auch **Oberfläche**.

(Sinnliche Bilder der geometrischen Fläche sind ein Blatt Papier und dergleichen Körper, wenn man von ihrer Dicke abstrahirt.)

In jeder geometrischen Fläche lassen sich wieder Gränzen denken, welche, damit sie der Vorstellung von dem Zusammenhang der Fläche nicht widersprechen, nur eine Ausdehnung haben dürfen. Eine solche Ausdehnung nach einer einzigen Gegend heißt eine Länge oder mathematische Linie. (Ein sinnliches Bild der mathematischen Linie ist ein mit Bleystift auf dem Papier gezogener Strich).

Diese drey Vorstellungen im Raume, Körper, Flächen und Linien heißen auch stetige oder zusammenhängende Größen (quantitates continuae). Sie machen allein den Gegenstand der Geometrie aus.

Den stetigen Größen setzt man die unstetigen Größen (quantitates discontinuas) entgegen. Sie entstehen, wenn man mehrere Dinge von einerley Art beysammen denkt, und, ohne auf die Lage, Ordnung und Verbindung dieser Dinge zu sehen, blos ihre Menge betrachtet. Die Vorstellung einer solchen Menge oder Vielheit heißt Zahl, und jenes Zusammenordnen der Dinge von einerley Art zählen. Die Wissenschaft von den Zahlen heißt die Arithmetik oder Rechenkunst.

Beyspiel. Die Vorstellung von vier Flächen, welche zusammen eine größere Fläche ausmachen, gehört in die Geometrie; die Vorstellung von vier, als einer bloßen Menge von Dingen gleicher Art, in die Arithmetik.

§. 3.

Die Arithmetik und Geometrie zusammen machen den Gegenstand der reinen Mathematik aus. Man theilet sie ihres großen Umfangs wegen in die Elementar- und höhere Mathematik ein, wovon jene die ersten

Gründe, diese die weitere Ausführung der reinen Grösſenlehre enthält. Doch unterscheidet sich auch die höhere Mathematik durch die Art, wie man — wenigstens in neuern Zeiten — ihre Lehren entwickelt, sehr von dem Vortrage der Elementarmathematik. Man bedient sich nämlich in jener der Buchstaben als allgemeiner Zeichen, sowohl für die stetigen als für die unstetigen Größen, und sucht durch mannigfaltige Verknüpfungen und Veränderungen dieser Zeichen nach bestimmten Regeln (deren ganzen Inbegriff man die mathematische Analysin nennt) aus bekannten Verhältnissen der Grösſen, andere unbekannte zu finden. Durch diese Behandlungsart, welche ganz die Erfindung neuerer Zeiten ist, hat die Mathematik in diesem Jahrhundert mehr gewonnen, als die Summe der Kenntnisse aller ältern Mathematiker beträgt, welche seit Jahrtausenden gelebt haben. Doch hatten es die alten Griechen, ohne dieses Hülfsmittel, auf einem weit mühsamern Wege, in der reinen Mathematik schon sehr weit gebracht. Dreyhundert Jahre vor Christi Geburt sammelte Euklid die vor und zu seiner Zeit gemachten Entdeckungen in der Elementargeometrie, ordnete und erwies sie so strenge, daß sein Vortrag noch bis auf diese Stunde Muster bleibt.

§. 4.

Die reine Größenlehre ist eine intellectuelle, für sich bestehende, von aller Erfahrung unabhängige Wissenschaft.

Der Geometer mißt in dem Raume, unbekümmert, ob eine Welt diesen Raum erfüllet. Der Arithmetiker sucht Verhältnisse von Zahlen, und fragt nicht, ob sich diese Verhältnisse auf blos mögliche, oder auf wirkliche Dinge beziehen.

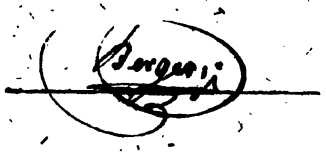
So leicht man hierdurch geneigt werden könnte, die ganze Mathematik für eine Menge unfruchtbarer Speculationen zu halten, eben so leicht wird man sich

doch von dem Gegentheil überzeugen, wenn man bedenkt, daß alle Körper nicht blos in Hinsicht ihrer Ausdehnung einen Gegenstand der Geometrie ausmachen, sondern daß selbst alle Eigenschaften und Kräfte der Körper, mit einem Wort, die ganze Natur, so weit wir sie kennen, nach bestimmten Gesetzen wirken, und eben daher die Folgen dieser Gesetze, die Erscheinungen der Körperwelt, der Allgewalt der Rechnung unterworfen werden können. Schon Plato nannte Gott einen geometrisirenden Gott. Die Anwendung der Mathematik schränkt sich nicht blos auf die Erscheinungen der Körper in ihrem natürlichen Zustande ein, sondern erstreckt sich selbst auf Veränderungen, die die Kunst in ihnen hervorbringt. In so fern nämlich solche Veränderungen gewisse Zwecke beabsichtigen, müssen sie nach bestimmten Regeln ausgeführt werden, und diese Regeln, oder die Gründe dazu werden nicht selten aus der reinen Größenlehre entlehnt. Der Handwerker, der Künstler arbeiten mit Maschinen, deren Construction sowohl, als Gebrauch auf Grundsätzen der Mathematik beruhen. Ja der Mensch im gemeinen Leben handelt und schliesset unzählig oft nach dunkel anerkannten mathematischen Wahrheiten. Man nennt diese Fertigkeit des Menschen mit Recht eine natürliche Mathematik.

§. 5.

Es erhellet von selbst, daß die angewandte Mathematik, wenn von einem wissenschaftlichen Vortrage derselben die Rede ist, in diesem weitläufigen Sinne nicht genommen werden kann. Folgendes wird deren Umfang näher bestimmen. Es giebt gewisse Theile der Naturlehre, in welchen wir die Gesetze der Erscheinungen und ihre Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Mathematik so vollkommen erkannt haben, daß wir die Folgen jener Gesetze bestimmt im voraus berechnen können. Diese Wissenschaften sind daher durchaus eines mathe-

Anfangsgründe der Mathematik.



Zum Gebrauch auf Schulen und Universitäten herausgegeben

von

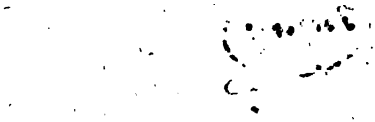
Georg Gottlieb Schmidt,
Professor der Mathematik zu Gießen.

Erster Theil.

Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Buchstabenrechenkunst.

Mit sechs Kupfertafeln.

Frankfurt am Mayn,
bey Varrentrapp und Wenner.
1797.



Vorrede.

Bey der großen Anzahl von deutschen Lehrbüchern der Mathematik, worunter einige Meisterwerke für alle aufgeklärte Nationen Muster des wissenschaftlichen Vortrags mathematischer Wahrheiten bleiben werden, würde ich es schwerlich gewagt haben mit diesen Anfangsgründen hervorzutreten, wenn ich nicht unlängst durch einen würdigen Gelehrten und Vorsteher eines Gymnasiums dazu wäre aufgefordert worden. Der Wunsch dieses Mannes, dessen Namen ich aus Bescheidenheit verschweige, gieng dahin: einen kurzen und faßlichen Unterricht in den mathematischen Wissenschaften, nach Art des zu seiner Zeit so allgemein beliebten Wolfischen Lehrbuches zu erhalten.

Ob ich seinen Wunsch erfüllet, und den mir vorgesetzten Zweck einigermaßen erreicht habe, überlasse ich der Entscheidung der Kenner. Ich bemerke jedoch hierbey folgendes, ohne das man schwerlich ein richtiges Urtheil von diesem Lehrbuche fällen würde. Die Erfahrung hat mich überzeugt, daß nicht nur solche, welche sogleich von Schulen zu ihrer künftigen Bestimmung gehen, sondern auch der größte Theil derjenigen, welche einen academischen Unterricht empfangen, sich nicht gerne lang mit einem strengen wissenschaftlichen Vortrag der mathematischen Lehren be-

schäftigen, sondern lieber (leider! oft zu bald), zu denjenigen Anwendungen derselben forteilen, von welchen sie demnächst Nutzen zu ziehen hoffen. Dies ist der Grund, warum ich selbst die Lehren der reinen Mathematik stets mit Anwendungen verbunden vorgetragen habe. Die Buchstabenrechenkunst, welche bey dem gegenwärtigen Zustand der Mathematik selbst Anfänger nicht entbehren können, habe ich in diesem Theil zuletzt abgehandelt, weil ich sogleich den Nutzen zeigen wollte, welchen diese Wissenschaft bey Erfindung methematischer Wahrheiten gewähret. Ueberhaupt ist es meiner Ueberzeugung nach besser, wenn der Anfänger erst durch den Vortrag arithmetischer und geometrischer Wahrheiten geübt an die Erlernung dieser Zeichensprache geht, weil er sich sonst entweder an einen mechanischen Calcul gewöhnet, oder wohl ganz von einer Wissenschaft zurückgeschrekt wird, von welcher er noch keinen Gebrauch einsieht. Daß ich bey der Ausarbeitung dieser Anfangsgründe unsre besten Lehrbücher der Mathematik, und insbesondere das Klügelische, dessen ich mich bisher bey meinem academischen Vortrag der reinen Mathematik bediente, benutzt habe, wird man von selbst finden.

Der zweyte Theil welcher die angewandte Mathematik enthalten wird, soll, wenn mir der Himmel meine nicht sehr feste Gesundheit fristet, demnächst erscheinen.

Inhalt des ersten Theils.

Seite

Einleitung . . 1

Die Rechenkunst.

1ter Abschnitt. Von den Zahlen überhaupt, den ganzen Zahlen und den vier Species der Rechenkunst. . . 9

2ter Abschnitt. Von den Primzahlen den zusammengesetzten Zahlen und den Brüchen. . 33

3ter Abschnitt. Von den Decimalbrüchen. . 45

4ter Abschnitt. Von den Potenzen und der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln. 51

5ter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf die Regula de Tri, Interessen-Gesellschafts- und Alligationsrechnung. . 73

6ter Abschnitt. Von der arithmetischen und geometrischen Reihe und deren Anwendung auf die Lehre von den Logarithmen. . 94

Die Geometrie mit Anwendung auf das Feldmessen.

I. Erklärungen und Grundsätze. . 120

II. Von der Lage der geraden Linien gegen einander und der Lehre von den Parallellinien. 131

III. Gleichheit der Dreyecke und Folgerungen. . 137

IV. Aehnlichkeit der Figuren. . 156

V. Vergleichung der geradlinichten Figuren und Ausmessung derselben. . 176

VI. Vom Kreise. . . 214

Die Stereometrie oder Meßkunst der Körper.

	Seite.
I. Von der Lage der Ebenen.	255
II. Prismatische Körper.	263
III. Cylinder oder walzenförmige Körper.	272
IV. Pyramiden und Kegel.	282
V. Von der Kugel.	291
Die ebene Trigonometrie.	301
Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.	311
Auflösung der gleichschenklichten Dreyecke.	315
Allgemeine Auflösung der Dreyecke.	319
Die Buchstabenrechenkunst.	322
Rechnung mit Potenzen und Wurzelgrößen.	344
Anwendung der Buchstabenrechenkunst auf einige arithmetische Wahrheiten.	348
Anwendung der Buchstabenrechenkunst auf geometrische Wahrheiten.	357

Einleitung.

§. 1.

Die Mathematik (μαθημα, μαθησις, der griechische Name bedeutet blos Wissenschaft, Unterricht) ist die Wissenschaft von den Größen und ihrem Verhalten gegen einander.

Man theilet sie in die reine und angewandte Mathematik ein. Jene beschäftiget sich mit der Betrachtung der Größen an und für sich. Diese wendet die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenstände der Natur, oder auf Bedürfnisse und Beschäftigungen des menschlichen Lebens an.

Eine Größe heißt alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist.

Die folgende Betrachtung wird die Vorstellung von Größe deutlicher machen, und das eigentliche Gebiete der Mathematik näher bestimmen.

§. 2.

Alle Dinge, die wir ausser uns wahrnehmen (Körper), beziehen wir auf einen gewissen Ort, an dem sie sich befinden. Wir können uns also keinen Körper ohne einen Raum, den er ausfüllet, vorstellen; das ist, wir können uns keinen Körper ohne Ausdehnung oder Größe denken. In so fern sagt man, die Ausdehnung oder Größe sey eine wesentliche Eigenschaft der Ma-

terie oder der Körperwelt. Es ist aber sehr wohl möglich, sich einen Raum, der nicht mit Materie erfüllt ist, vorzustellen, wenn gleich ein solcher leerer Raum in der Körperwelt nicht gefunden werden sollte. Mit dieser Vorstellung des bloßen Raumes und den verschiedenen Ausdehnungen in demselben hat es die **Geometrie** oder Meßkunst zu thun.

Man denke sich von dem unbegränzten Raume, in dem wir uns alle Körper vorstellen, einen Theil von willkührlicher Gestalt und Größe von dem übrigen abgesondert, so erhält man den **geometrischen Körper**. Diese Vorstellung vom geometrischen Körper wird versinnlicht durch Anschauung physischer Körper, von deren Materie und den ihr zukommenden Eigenschaften man abstrahirt. Man kann sich in jedem geometrischen Körper drey Ausdehnungen nach drey ganz verschiedenen Gegenden denken. Sie heißen **Länge, Breite** und **Dicke**. Es ist ferner verstattet, sich mehrere geometrische Körper an, neben und über einander so vorzustellen, daß sie zusammen nur einen einzigen größern geometrischen Körper ausmachen. Denn jene Gränzen, welche den geometrischen Körper, oder den bestimmten Raum von dem unbestimmten, unbegränzten Raume absondern, sind nur eingebildet, und dürfen also der Vorstellung von dem ununterbrochenen Zusammenhange des Raumes nicht widersprechen. Wir können daher diesen Gränzen der geometrischen Körper nur eine Ausdehnung nach zwey verschiedenen Gegenden, **Länge** und **Breite**, zuschreiben. Hätten sie nur die mindeste Ausdehnung nach der dritten Gegend, so würden sie selbst schon Körper werden, welches dem unmittelbaren Zusammenhange zweyer an einander stoßenden geometrischen Körper widerspricht. Eine solche Gränze im körperlichen Raum nennt man eine **geometrische Fläche**, in Bezug auf den geometrischen Körper, welchen sie begränzt, auch **Oberfläche**.

(Sinnliche Bilder der geometrischen Fläche sind ein Blatt Papier und dergleichen Körper, wenn man von ihrer Dicke abstrahirt.)

In jeder geometrischen Fläche lassen sich wieder Gränzen denken, welche, damit sie der Vorstellung von dem Zusammenhang der Fläche nicht widersprechen, nur eine Ausdehnung haben dürfen. Eine solche Ausdehnung nach einer einzigen Gegend heißt eine Länge oder mathematische Linie. (Ein sinnliches Bild der mathematischen Linie ist ein mit Bleystift auf dem Papier gezogener Strich).

Diese drey Vorstellungen im Raume, Körper, Flächen und Linien heißen auch stetige oder zusammenhängende Größen (quantitates continuae). Sie machen allein den Gegenstand der Geometrie aus.

Den stetigen Größen setzt man die unstetigen Größen (quantitates discontinuas) entgegen. Sie entstehen, wenn man mehrere Dinge von einerley Art beysammen denkt, und, ohne auf die Lage, Ordnung und Verbindung dieser Dinge zu sehen, blos ihre Menge betrachtet. Die Vorstellung einer solchen Menge oder Vielheit heißt Zahl, und jenes Zusammenordnen der Dinge von einerley Art zählen. Die Wissenschaft von den Zahlen heißt die Arithmetik oder Rechenkunst.

Beyspiel. Die Vorstellung von vier Flächen, welche zusammen eine größere Fläche ausmachen, gehört in die Geometrie; die Vorstellung von vier, als einer bloßen Menge von Dingen gleicher Art, in die Arithmetik.

§. 3.

Die Arithmetik und Geometrie zusammen machen den Gegenstand der reinen Mathematik aus. Man theilet sie ihres großen Umfangs wegen in die Elementar- und höhere Mathematik ein, wovon jene die ersten

Gründe, diese die weitere Ausführung der reinen Grösſenlehre enthält. Doch unterscheidet sich auch die höhere Mathematik durch die Art, wie man — wenigstens in neuern Zeiten — ihre Lehren entwickelt, sehr von dem Vortrage der Elementarmathematik. Man bedient sich nämlich in jener der Buchstaben als allgemeiner Zeichen, sowohl für die stetigen als für die unstetigen Größen, und sucht durch mannigfaltige Verknüpfungen und Veränderungen dieser Zeichen nach bestimmten Regeln (deren ganzen Inbegriff man die mathematische Analysin nennt) aus bekannten Verhältnissen der Grösſen, andere unbekannte zu finden. Durch diese Behandlungsart, welche ganz die Erfindung neuerer Zeiten ist, hat die Mathematik in diesem Jahrhundert mehr gewonnen, als die Summe der Kenntnisse aller ältern Mathematiker beträgt, welche seit Jahrtausenden gelebt haben. Doch hatten es die alten Griechen, ohne dieses Hülfsmittel, auf einem weit mühsamern Wege, in der reinen Mathematik schon sehr weit gebracht. Dreyhundert Jahre vor Christi Geburt sammelte Euklid die vor und zu seiner Zeit gemachten Entdeckungen in der Elementargeometrie, ordnete und erwies sie so strenge, daß sein Vortrag noch bis auf diese Stunde Muster bleibt.

§. 4.

Die reine Größenlehre ist eine intellectuelle, für sich bestehende, von aller Erfahrung unabhängige Wissenschaft.

Der Geometer mißt in dem Raume, unbekümmert, ob eine Welt diesen Raum erfüllet. Der Arithmetiker sucht Verhältnisse von Zahlen, und fragt nicht, ob sich diese Verhältnisse auf blos mögliche, oder auf wirkliche Dinge beziehen.

So leicht man hierdurch geneigt werden könnte, die ganze Mathematik für eine Menge unfruchtbarer Speculationen zu halten, eben so leicht wird man sich

doch von dem Gegentheil überzeugen, wenn man bedenkt, daß alle Körper nicht blos in Hinsicht ihrer Ausdehnung einen Gegenstand der Geometrie ausmachen, sondern daß selbst alle Eigenschaften und Kräfte der Körper, mit einem Wort, die ganze Natur, so weit wir sie kennen, nach bestimmten Gesetzen wirken, und eben daher die Folgen dieser Gesetze, die Erscheinungen der Körperwelt, der Allgewalt der Rechnung unterworfen werden können. Schon Plato nannte Gott einen geometrisirenden Gott. Die Anwendung der Mathematik schränkt sich nicht blos auf die Erscheinungen der Körper in ihrem natürlichen Zustande ein, sondern erstreckt sich selbst auf Veränderungen, die die Kunst in ihnen hervorbringt. In so fern nämlich solche Veränderungen gewisse Zwecke beabsichtigen, müssen sie nach bestimmten Regeln ausgeführt werden, und diese Regeln, oder die Gründe dazu werden nicht selten aus der reinen Größenlehre entlehnt. Der Handwerker, der Künstler arbeiten mit Maschinen, deren Construction sowohl, als Gebrauch auf Grundsätzen der Mathematik beruhen. Ja der Mensch im gemeinen Leben handelt und schliesset unzählig oft nach dunkel anerkannten mathematischen Wahrheiten. Man nennt diese Fertigkeit des Menschen mit Recht eine natürliche Mathematik.

§. 5.

Es erhellet von selbst, daß die angewandte Mathematik, wenn von einem wissenschaftlichen Vortrage derselben die Rede ist, in diesem weitläufigen Sinne nicht genommen werden kann. Folgendes wird deren Umfang näher bestimmen. Es giebt gewisse Theile der Naturlehre, in welchen wir die Gesetze der Erscheinungen und ihre Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Mathematik so vollkommen erkannt haben, daß wir die Folgen jener Gesetze bestimmt im voraus berechnen können. Diese Wissenschaften sind daher durchaus eines mathe-

matischen Vortrags fähig. Man begreift sie am besten unter dem Namen der physischangewandten Mathematik. Nach einigen neuern Schriftstellern heißt sie auch ausschließlich angewandte Mathematik. Man rechnet hierher die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften. Die ersten beschäftigen sich mit den Kräften und Bewegungen der Körper; die andern enthalten die Lehren vom Licht; die letztern die Lehre von den Weltkörpern. In diesen drey Wissenschaften hat es der menschliche Geist, durch Anwendung der erhabensten Geometrie und des tiefsinnigsten Calculs zu einer fast unglaublichen Vollkommenheit gebracht, die man selbst noch im vorigen Jahrhundert für unerreichbar gehalten haben würde. Noch täglich erhält dieser Theil der angewandten Mathematik sehr ansehnliche Erweiterungen. Bouger und Lambert haben die optischen Wissenschaften mit einer ganzen Disciplin, der Photometrie, vermehrt. Auch hat der letztere bereits die Lehre von dem Feuer unter dem Namen der Pyrometrie mathematischer, als in den Compendien der Physik zu geschehen pflegt, abzuhandeln versucht. Mit einem Wort, es giebt keinen Theil der Naturlehre, der nicht auch ein Theil der angewandten Mathematik werden könnte. Ist er es bis jetzt nicht, so rührt dieß blos von der Unvollkommenheit unserer Kenntniß der Natur her. Es liegt alsdann dem Physiker ob, durch zweckmäßig angestellte Versuche und Beobachtungen den Zusammenhang der Erscheinungen auszuspähen, und sie unter allgemeine Gesetze zu ordnen. Dem Mathematiker hingegen bleibt es überlassen, aus den als wahr erkannten Gesetzen, mit Hülfe der Geometrie und Analysis, alle nur mögliche Folgen in ihrer größten Allgemeinheit darzuthun, und eben dadurch andere verwickeltere Erscheinungen mit jenen Gesetzen in übereinstimmenden Zusammenhang zu bringen. Den andern Hauptzweig der angewandten Mathematik, welcher sich auf Geschäfte

und Bedürfnisse des menschlichen Lebens bezieht, nennt man am besten die technischangewandte Mathematik, oder die gemischte Mathematik. Da in diesen Wissenschaften vieles von der Willkühr des Menschen, den Regeln der Schönheit und des guten Geschmacks, überhaupt vieles von Gründen abhängt, welche nicht aus der reinen Größenlehre entlehnt werden, so lassen sich ihre meisten Lehrsätze nicht ganz strenge erweisen, oft nur durch die Erfahrung rechtfertigen. Man hat daher diese Wissenschaften, theils ihrer Weitläufigkeit, theils ihres minder mathematischen Vortrags wegen, in den neuern Compendien der angewandten Mathematik ausgeschlossen. Zunächst hierher gehören, als Anwendungen der Geometrie auf Bedürfnisse des menschlichen Lebens, die Feldmeßkunst, das Wasserwägen und die Markscheidekunst. Die erste lehrt kleine Stücke unsrer Erdoberfläche, welche als ebene Flächen angesehen werden können, ausmessen, zeichnen und eintheilen. Das Wasserwägen zeigt, wie man die Erhebung oder Vertiefung eines Orts auf der Erde über den wahren Horizont, oder die eigentliche Kugeloberfläche der Erde finden könne. Die Markscheidekunst ist eine unterirdische Feldmeßkunst, welche sich mit den Gängen der Erze und den Gruben des Bergmanns beschäftiget. Die Theorie dieser Künste gestattet fast durchaus einen rein-mathematischen Vortrag, und man verbindet insbesondre oft mehrere Aufgaben der Feldmeßkunst mit dem Vortrage der Geometrie, um die Lehrsätze derselben für den Anfänger unterhaltender und brauchbarer zu machen. Zu der technisch-angewandten Mathematik gehören ferner die Baukünste, die Maschinenlehre, oder practische Mechanik, die Kriegs- und Seewissenschaften. Man unterscheidet die Kriegs- und Civilbaukunst. Jene macht einen Theil der Kriegswissenschaften aus, beyde begreifen die Wasser- und Strassenbaukunst mit unter sich. Die Maschinenlehre zeigt nicht nur, die Maschi-

nen ihrem Zwecke gemäß nach Gründen der Mechanik zu bauen, und deren Wirkung zu bestimmen, sondern auch die Unkosten derselben zu berechnen. Die Kriegswissenschaften begreifen, ausser der schon genannten Kriegsbaukunst, die Lehre von dem Geschütz, von dem Angriff und der Vertheidigung der Festungen, von den Evolutionen oder der Bewegung großer und kleiner Heere, und die eigentliche Tactik, oder die Bildung des einzelnen Soldaten unter sich.

Noch rechnen einige unter die technisch-angewandte Mathematik die politische Rechenkunst (man begreift darunter Anwendungen der Arithmetik auf Einrichtungen und Bedürfnisse des Staats), die mathematische Forstwissenschaft, und mehrere andere. Da sie indessen theils eigene Wissenschaften ausmachen, theils bereits andern zugezählt sind, so übergehe ich sie. Die Musik verdient jedoch einer besondern Erwähnung. Sie war bey den alten Griechen ein Hauptgegenstand der angewandten Mathematik. In der That ist bey der Lehre von dem Schall und den Tönen auch sehr vieles einer strengen mathematischen Berechnung fähig. Indessen beruht die mannichfaltige Verbindung und Folge der Töne nach den Regeln der Harmonie und Melodie, mehr auf dem Gefühl von Schönheit und Wohllaut, oder dem sogenannten musikalischen Gehör, als auf mathematischen Gründen. Man rechnet in neuern Zeiten den mathematischen Theil dieser Wissenschaft zu der Naturlehre, das übrige und die Ausübung derselben zu den schönen Künsten.

Die Rechenkunst.

(Arithmetik.)

I. Abschnitt.

Von den Zahlen überhaupt, den ganzen Zahlen und den vier Species der Rechenkunst.

---

1) Erklärung. Eine Zahl, Anzahl ist die Vorstellung einer Menge von Dingen einer Art.

2) Anmerkung. Der Mathematiker denkt sich unter einer Zahl eigentlich eine Menge von Dingen völlig einerley Art, oder eine Menge von gleichen Dingen. Im gemeinen Leben, und überhaupt bey den Anwendungen der Rechenkunst müssen wir oft auch Dinge, die nicht ganz von einerley Art sind, zusammenzählen. Alsdann heben wir das Gemeinschaftliche bey ihnen aus, und zählen sie bloß in Hinsicht dieses Gemeinschaftlichen zusammen. Z. B. 3 Quartbände und 2 Octavbände machen, als Bücher, die Zahl 5 aus. Da es nun keine Dinge in der Welt giebt, seyen sie auch noch so verschieden, bey denen sich nicht etwas Gemeinschaftliches auffinden läßt, so erhellet hieraus die mannichfaltige Anwendung und der große Gebrauch der Lehre von den Zahlen.

3) Erklärung. Das, was bey einer Zahl wiederholt gedacht wird, heißt die Einheit.

4) Anmerkung. Eigentlich weiß jeder Mensch, was Eins ist, und darf es nicht erst aus Erklärungen lernen wollen, sonst wird er es in der Mathematik

nicht weit bringen. Der Begriff von Zahl als Menge oder Vielheit setzt den Begriff von Einheit, durch deren Wiederholung die Vielheit entstehet, voraus.

5) Willkührlicher Satz. Es ist verstattet, sich die Einheit (so wie jede Größe) als ein Ganzes (totum) vorzustellen. Jedes Ganze läßt sich in Theile theilen, und diese Theilung kann man, so weit man will, fortsetzen. Durch Wiederholung der Einheit, als ein Ganzes betrachtet, entstehen die ganzen Zahlen, oder (wie ich sie hier der Kürze wegen nenne) die Zahlen. Nimmt man irgend einen Theil der Einheit ein- oder etlichemal, so erhält man eine gebrochene Zahl oder einen Bruch.

6) Satz. Sowohl die Reihe der ganzen als der gebrochenen Zahlen läßt sich ohne Ende, d. i. so weit man nur immer will, fortsetzen.

7) Anmerkung. Es erhellet, daß der Unterschied zwischen ganzen und gebrochenen Zahlen nichts wesentliches, sondern eine bloße Form ist, welche sich auf eine gewisse Vorstellung von der Einheit bezieht. Man kann daher jeden Bruch auch als eine ganze Zahl betrachten, sobald man den Theil der Einheit, welchen der Bruch ein- oder etlichemal enthält, als ein Ganzes ansieht. So sind fünf halbe Ellen ein Bruch, wenn man die Elle als das Ganze betrachtet. Sieht man hingegen die halbe Elle oder den Fuß als das Ganze an, so wird dieselbe Größe durch die ganze Zahl von fünf Fußen ausgedrückt. Indessen bringt jene Unterscheidung der Zahlen in ganze und gebrochene in der Rechenkunst einen sehr großen Vortheil, und wir müssen daher sowohl die Eigenschaften der ganzen, als der gebrochenen Zahlen, und die Veränderungen, welche man mit ihnen vornehmen kann, näher kennen lernen. Wir machen mit der Betrachtung der ganzen Zahlen den Anfang.

8) Willk. Satz. Um die Zahlen durch Wörter aussprechen zu können, legt man ihnen verschiedene Namen bey. Man beobachtet bey dieser Bezeichnungsart folgendes Gesetz. Jede der ersten neun Zahlen erhält einen besondern Namen. Sie heißen zusammen Einer. Die zehnfache Einheit oder Zehn betrachtet man als eine Einheit einer höhern Gattung, und drückt durch dieselbe und die Einer alle Zahlen von Zehn bis Hundert (dem zehnfachen Zehner) aus. Dieser dienet abermals als eine nächst höhere Einheit, nebst den Zehnern und Einern alle Zahlen von hundert bis tausend auszusprechen. So geht dies Gesetz, wo man der zehnmal größern Zahl jederzeit einen eignen Namen giebt, und sie als eine Einheit einer höhern Classe ansieht, fort bis zur Million (dem tausendfachen Tausend). Von hier an giebt man, um die Menge der Wörter nicht allzusehr zu häufen; nur den millionenmal größern Zahlen neue Namen. So heißt eine Billion so viel, als millionenmal Millionen, eine Trillion millionenmal Billionen und so fort ohne Ende.

9) Anmerkung. Man nennt diese Art zu zählen und die Zahlen auszusprechen das decadische Gesetz. Es gewähret vor vielen andern, die sich erdenken lassen, ungemeinen Vortheil, da man vermittelst desselben mit so wenig Worten eine so ungeheure Menge von Zahlen bestimmt ausdrücken kann. Schon die Alten kannten diese Art, von zehn zu zehn zu zählen, und man ist wahrscheinlich sehr leicht durch das Abzählen an den Fingern darauf gekommen.

Für sehr viele Menschen sind die Worte: Million, Billion, Trillion u. s. w. leere Töne, oder sie machen sich wenigstens von der Größe dieser ungeheuren Zahlen keine richtige Vorstellung. Man gelangt zu derselben nur dadurch, daß man solche große Zahlen mit kleineren, von deren Größe man sich bereits eine deutliche Vor-

stellung erworben hat, vergleicht, und sieht, wie jene aus diesen entstehen.

Eine Billion Secunden (Augenblicke) deren 3600 auf eine Stunde gehen, macht über 31688 Jahre, das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tag gerechnet, also mehr als fünfmal so viel, als seit der Erschaffung der Welt (nach der gewöhnlichen Zeitrechnung) verflossen sind. Uranus, der entfernteste unter den jetzt bekannten Planeten unsers Sonnensystems, ist zwischen 18 und 19 mal weiter von der Sonne weg, als unsere Erde. Nimmt man die kleinere Zahl, und setzt die Entfernung der Erde von der Sonne 24 Millionen Meilen, die Meile gleich 24000 Fuß, so ist Uranus über 10 Billionen (10"368000000000) Meilen von der Sonne entfernt. Eine Kanonenkugel würde, wenn man ihre Geschwindigkeit in einer Secunde 600 Fuß setzt, nahe an 600 Jahre brauchen, um diesen Weg zurück zu legen. Eine Trillion Gerstenkörner hervorzubringen, müßte die ganze Erde in Ackerland verwandelt werden. (Man rechne den Morgen Landes zu 30720 Quadratfuß, die geographische Meile, 15 auf einen Grad, zu 23660 rheinl. Fußen, so hält eine Quadratmeile $18222\frac{1}{2}$ Morgen. Die Oberfläche der Erde enthält 9281916 Quadratmeilen, also 169139714310 Morgen. Auf ein Pfund gehen etwa 10150 Gerstenkörner. Es müßte also ein Morgen 583 ℔ ertragen.)

10) Willk. Satz. Die Zahlen zu schreiben, bedienet man sich der bekannten neun Ziffern nebst der 0, oder dem Stellenzeichen. Die Einer werden durch die Ziffern unmittelbar, die Zehner, als Einheiten einer höhern Ordnung, durch dieselben Ziffern aber in einer Stelle weiter zur Linken, die Hunderte, die Tausende u. s. w. wieder durch dieselben Ziffern um zwey, drey u. s. w. Stellen zur Linken angedeutet, so daß jede Stelle, um welche man weiter von der Rechten zur Linken geht,

sich auf zehnfach größere Einheiten bezieht. Bleiben die Stellen rechter Hand leer, so werden sie mit o bezeichnet.

Beyspiel. 300, 50, 6. Drey in der Stelle der Hunderte, dreyhundert; 5 in der Stelle der Zehner, funfzig; 6 in der Stelle der Einer, sechs.

11) Anmerkung. Durch den Gedanken, bey den Ziffern einen Werth auf die Stelle zu legen, hat man den großen Vortheil erhalten, durch zehn Zeichen alle nur mögliche Zahlen zu schreiben. Es ist dies eine der wichtigsten und schönsten Erfindungen des menschlichen Geistes. Der Erfinder selbst ist unbekannt. Die Art, die Stellen von der rechten zur linken Hand zu zählen, beweißt indessen den morgenländischen Ursprung derselben. Durch die Araber kam diese Erfindung in dem zwölften Jahrhundert nach Europa, und jene erhielten sie wahrscheinlich von den Indianern. Die alten Griechen und Römer kannten die Art, Zahlen durch Ziffern zu schreiben, welche durch die Stelle, worinnen sie sich befinden, einen Werth erhalten, nicht. Man versuche es nur, und schreibe eine mäßig große Zahl mit römischen Ziffern, so wird man das Unbehülfliche derselben, in Vergleichung gegen die jetzt übliche Bezeichnungsart bald einsehen.

12) Aufgabe. Eine durch Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen.

Man sehe, welche Stelle einer jeden Ziffer von der rechten zur linken Hand zukommt, und spreche sie nach dem Werth dieser Stelle aus.

Um hierbey dem Gedächtniß und dem Auge zu Hülfe zu kommen, theile man sich, wie folgt, die Zahlen von der Rechten zur Linken von drey zu drey, oder von sechs zu sechs Ziffern ab:

I I

4683, 214 oder 4683214.

Die 4te Ziffer bezieht sich auf Tausende, die 7te auf Millionen, die 10te auf Billionen u. s. f. Die Stelle der Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. bezeichnet man durch die oben darüber gesetzten römischen Ziffern I, II, III, u. s. w. Die Stelle der Tausende, tausend Millionen, tausend Billionen u. s. w. durch ein (,).

Man spreche vier Millionen, sechs hundert, drey und achtzig tausend, zwey hundert und vierzehn. (Einer)

iii ii i
184467440737095516l5

Achtzehn Trillionen, vier hundert, sechs und vierzig tausend, sieben hundert, vier und vierzig Billionen, drey und siebenzig tausend, sieben hundert und neun Millionen, fünf hundert, ein und funfzig tausend, sechs hundert und funfzehn. (Diese Zahl ist die Summa aller Gerstenkörner, welche herauskommt, wenn man für das erste Feld eines Schachbretes eins, für das zweyte zwey, für das dritte vier, und so weiter immer doppelt rechnet.

13) Anmerkung. Es ist gut sich anzugewöhnen, wenigstens 6 Ziffern auf einmal aussprechen zu können, weil die Abtheilung durch Commata, wegen der Bezeichnung der Decimalbrüche, wie wir in der Folge sehen werden, Verwirrung veranlassen könnte.

14) Aufgabe. Eine in Worten ausgesprochene Zahl zu schreiben.

Man schreibe jeden Theil der Zahl nach dem Werthe der Einheit, worauf er sich bezieht, an seine gehörige Stelle.

15) Anmerkung. Da wir jetzt nicht mehr — wie wohl ehedessen geschah — die Zahlen von der Rechten zur Linken lesen, so muß man eine ausgesprochene Zahl erst ganz anhören, ehe man sie schreiben

kann. Ueberhaupt muß man sich bereits eine Fertigkeit in dem Lesen geschriebener Zahlen erworben haben, um gesprochene Zahlen richtig zu schreiben. Uebung erleichtert beydes.

Die Addition.

16) Erklärung. Zwey oder mehrere Zahlen durch eine Zahl ausdrücken, heißt: die Zahlen addiren. Diejenige Zahl, welche mehreren andern zusammengenommen gleich ist, heißt ihre Summa.

17) Anmerkung. Wenn die Zahlen, welche zusammengenommen werden sollen, klein und ihrer wenige sind, so wird man die Rechnung, ohne die Zahlen hinzuschreiben, im Kopf verrichten können. Bey mehrern und größern Zahlen geht dieß nicht an. Die Vorschriften zur Zusammenrechnung solcher Zahlen begreift man eigentlich unter der Addition.

18) Aufgabe. Zwey oder mehrere Zahlen zu addiren. Man schreibe die Zahlen so untereinander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w. zu stehen kommen. Rechne hierauf jede Gattung von Einheiten besonders zusammen, und nehme alsdann alle diese einzelnen Summen wieder zusammen, so erhält man die ganze Summe. Beyspiel:

823	
42	
6218	
13	Einer
7	Zehner
10	Hunderte
6	Tausende.
ganze Summa 7083	

Kürzer:

Man rechne das, was bey der Summirung der Einer über zehn beträgt, im Sinne gleich zu den Zehnern, indem man für jedes Zehn der Einer eine Einheit der Zehner schreibt. Eben so rechne man bey der Summirung der Zehner je 10 Zehner, als 1 zu den Hunderten, bey der Summirung der Hunderte je 10 Hunderte, als 1 zu den Tausenden u. s. w., so wird man durch eine einfache Addition gleich die ganze Summe erhalten. Beyspiel der abgekürzten Addition:

3324
8156
2748
963
15191 Summe.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet von selbst, da alle Theile zusammengenommen dem Ganzen gleich seyn müssen.

Das Zeichen der Addition ist ein +, welches man zwischen die zu addirenden Zahlen setzt. Das Zeichen der Gleichheit ist =.

3 + 4 = 7, lieset man drey plus vier ist gleich oder so viel als sieben.

Die Subtraction.

19) Erklärung. Subtrahiren heißt eine Zahl von der andern wegnehmen, um dadurch zu finden, wie viel die größere die kleinere übertrift. Die größere Zahl heißt der Minuend, die kleinere der Subtrahend, der Unterschied zwischen beyden der Rest.

20) Aufgabe. Zwey Zahlen von einander zu subtrahiren. Man schreibe die kleinere Zahl so unter die größere, daß die Einheiten von jeder Ordnung unter einander kommen, nehme hierauf die Einer des Subtrahends

trahends von den Einern des Minuends weg, und schreibe was übrig bleibt darunter. Eben so verfahre man mit den Zehnern, den Hunderten, den Tausenden u. s. w. Sollte eine Ziffer des Subtrahends größer als die darüber stehende des Minuends seyn, so kann der Abzug nicht geradezu geschehen. Man leihe alsdann von der nächst höheren Stelle des Minuends eine 1 und rechne sie als 10 zu der vorhergehenden Stelle, um von dieser den Abzug verrichten zu können. Träfe es sich, daß in der nächst höhern Stelle des Minuends ein 0 stünde, so leihe man über dasselbe weg von der zweyt höheren Stelle eine 1, diese macht 10 in der Stelle der 0, hiervon wieder 1 weggenommen giebt 10 in der Stelle, von welcher der Abzug geschehen soll, und läßt 9 in der Stelle der 0. Dieß drückt man kurz so aus, wenn über ein 0 weg geliehen wird, so verwandelt es sich in 9. Eben so verwandeln sich mehrere hinter einander stehende Nullen, über welche hinweggeliehen wird in Neuner. Die Stellen, von welchen geliehen worden ist, bezeichnet man mit einem oben an gesezten Pünctchen. Beyspiel:

		10·10·	10·10·
Minuend	723	8403	2003
Subtrahend	312	6254	1826
Rest	411	2149	177

In der Ausübung hat man die geliehenen 10 nicht nöthig darüber zu schreiben. Sie stehen hier blos zur Erläuterung. Das Zeichen der Subtraction ist ein — welchen man zwischen den Minuend und Subtrahend sezt.

$$12 - 8 = 4,$$

Man lese 12 minus 8 ist gleich 4.

21) Satz. Der Unterschied zu der kleinern Zahl addiret giebt die größere. In dem vorstehenden Exempel $8 + 4 = 12$. Dieß giebt eine Probe der

Subtraction durch die Addition. Man rechne den Subtrahend zu dem Rest, so muß der Minuend heraus kommen.

22) **Anmerkung.** Addition und Subtraction dienen sich einander wechselsweise zur Probe. Eine Probe der Subtraction auf die Addition ist folgende. Man addire die summirten Zahlen ohne eine noch einmal zusammen, schreibe diese Partialsumme unter die ganze Summe, und ziehe jene von dieser ab, so bleibt die bey der Partialsumme weggelassene Zahl übrig.

Beyspiel:

8231	
4733	
8924	
21888	Summe
13057	Partial Summe
8231	Probe

Eine andere schnellere Probe der Addition ist folgende. Man lese die Ziffern der zusammen addirten Zahlen als bloße Einer, ohne auf den Werth ihrer Stelle zu sehen, und werfe aus ihrer Summe 9 so oft weg als angeht und merke den Rest. Nun werfe man auch 9 aus den Ziffern der Summe, als bloße Einer gelesen, so oft weg als angeht. Der Rest, welcher hier bleibt, muß jenem Reste gleich seyn, wenn richtig addiret worden ist. Im vorstehenden Exempel sähe diese Probe so aus.

8231	
4733	
8924	0 Rest
21888	0 Rest

Diese Probe gründet sich auf folgenden Satz.

23) Satz. Neun, aus einer Zahl so oft weggenommen als angeht, läßt eben den Rest, als wenn man 9 aus der Summe der Ziffern dieser Zahl, als Einer gelesen, wegnimmt. Dieß erhellet aus folgendem Schema,

9 aus 10 weggeworfen, läßt 1
— 20 —— 2
— 30 —— 3
— 40 —— 4
— 50 —— 5
— 60 —— 6
— 70 —— 7
— 80 —— 8
— 90 —— 9

also aus 100 = 90 + 10, 9 weggeworfen
bleibt 1
folglich aus 200 —— 2
— 300 —— 3
— 400 —— 4
— 500 —— 5
— 600 —— 6
— 700 —— 7
— 800 —— 8
— 900 —— 0

folglich aus 1000 = 900 + 100
bleibt wieder 1
und aus 2000 ——— 2
— 3000 ——— 3

und so geht dieß Gesetz immer weiter. Nun sind alle Zahlen aus Einern, Zehnern, Hunderten, Tausenden u. s. w. zusammengesezt, und da vermöge des bemerkten Gesetzes jeder Zehner, ieder Hunderte, ieder Tausende, wenn 9 von ihm weggenommen wird, so oft als angeht, eben den Rest läßt, welchen seine Ziffer

als Einer gelesen giebt, so fliesset hieraus, daß einerlei Rest bleiben muß, ob man aus der Summe der Ziffern oder aus der Zahl selbst 9 wegwirft.

24) Anmerkung. Verbindet man mit dem vorhergehenden Satz den: daß einerley Rest bleiben muß, man mag 9 aus der Summe oder aus den einzelnen zusammen addirten Theilen wegwerfen, so erhellet, daß die Probe durch Wegwerfen der 9 zutrift, wenn richtig addirt ist. Ganz untrüglich ist sie indessen nicht, weil man nicht beweisen kann, daß sie nicht zutreffe, wenn nicht richtig addiret ist. Vielmehr erhellet, daß, wenn bey dem Addiren in einer Stelle so viel zu viel als in einer andern zu wenig genommen würde, die Probe zutreffen müßte und doch unrichtig gerechnet wäre. Da indessen ein solcher Fehler nur selten begangen wird, so bleibt die Probe immer nützlich.

Von der Multiplication.

24) Erklärung. Multipliciren heißt eine Zahl so viel mal nehmen, als eine andere anzeigt. Jene Zahl heißt der Multiplicand, diese der Multiplicator, beyde zusammen nennt man die Factoren, was heraus kommt, das Produkt. Aus dem Begriff der Multiplication fließt, daß das Produkt eben so aus dem Multiplicand, wie der Multiplicator aus der Einheit, entstehen muß. Sind beyde Factoren, wie wir hier annehmen, ganze Zahlen, so enthält das Produkt den Multiplicand so viel mal, als der Multiplicator die Einheit. Man findet daher das Produkt, wenn man den Multiplicand so viel mal zu sich addiret, als der Multiplicator Einheiten hat. Da aber dieß in den meisten Fällen zu weitläuftig seyn würde, so bedienet man sich eines abgekürzten Verfahrens, welches eigentlich die Multiplication heißt. Das Zeichen der Multiplica-

tion ist ein Punct oder ein ×, welches man zwischen die Factoren setzt z. B.

$$5 . 6 = 30 \text{ oder } 5 \times 6 = 30$$

Man lese fünf mal sechs gleich dreyßig.

25) Satz. Ein Produkt ändert sich nicht, wenn man gleich die Ordnung der Factoren ändert, den Multiplicand zum Multiplicator und den Multiplicator zum Multiplicand macht. Das vorstehende Exempel mag zum Erweis dieses Satzes dienen. Da der Multiplicand 6 in dem Produkt 30 fünf mal enthalten ist, so müssen je 6 Einer in 30 Einern fünf mal enthalten seyn. Hieraus fließt aber, daß auch je 5 Einer in 30 Einern sechs mal enthalten seyn müssen. Das folgende Schema, wo jedes × eine Einheit bedeutet, versinnlicht diesen Satz.

A × × × × × × B
× × × × × ×
× × × × × ×
× × × × × ×
C × × × × × × D

Es ist einerley, ob man A B 5 mal unter einander oder A C 6 mal neben einander schreibt.

26) Aufgabe. Alle Vielfache bis zu dem Neunfachen der Zahlen von 1 bis 9 zu finden. Man schreibe die 9 ersten Zahlen in eine horizontale und in eine verticale Reihe, addire die Zahlen der horizontalen Reihe zu sich selbst, so erhält man das Doppelte. Dieses Doppelte schreibe man unter das Einfache in eine 2te horizontale Reihe. Das Doppelte addire man zu dem Einfachen, so erhält man das Dreyfache, welches in die 3te horizontale Reihe geschrieben wird; das Dreyfache zu dem Einfachen giebt das Vierfache und kommt in die 4te Reihe. So geht es fort bis zum Neunfachen, wie folgt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

27) Anmerkung. Dieses Täfelchen heißt das Ein mal Eins. Die Einrichtung desselben gewähret den Vortheil, daß das Produkt von zwey einfachen Zahlen da steht, wo die horizontale und verticale Reihe durch beyde Zahlen sich schneiden, z. B. 6. 7 oder 7. 6 = 42. Man muß das Ein mal Eins auswendig wissen um multipliciren zu können, denn die Abkürzung der Multiplication besteht darin, daß man den Multiplicand nicht einzeln, sondern sogleich diejenigen Vielfachen des Multiplicands, welche der Multiplicator anzeigt, zusammen addiret.

28) Aufgabe. Eine Zahl durch eine andere zu multipliciren.

1ter Fall. Wenn der Multiplicator nur eine Ziffer enthält. Man nehme die Vielfache der Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. des Multiplicands, welche der Multiplicator anzeigt, und addire sie zusammen, so erhält man das Produkt. Beyspiel.

8234	Multiplicand
7	Multiplicator
28	Einer
21	Zehner
14	Hunderte
56	Tausende
57638	Produkt

Kürzer. Man rechne das, was in dem Vielfachen der Zehner, Hunderte u. s. w. ausmacht, im Sinne gleich zu dem Vielfachen der höhern Stelle des Multiplicands. Beyspiel:

8234
7
57638

2ter Fall. Wenn der Multiplicator ein Zehner, Hunderter, Tausender, oder überhaupt eine Zahl von einer Ziffer mit anhängenden Nullen ist. Man multiplicire den Multiplicand mit der bedeutenden Ziffer des Multiplicators und hänge an das Produkt so viel Nullen, als der Multiplicator enthält.

Beyspiel:	854	854
	30	300
	25620	256200

Eine Zahl 30 mal nehmen ist soviel als sie 10 mal 3 mal nehmen. Die dreyfache Zahl wird aber 10 mal genommen, wenn man ein 0 hinter sie schreibt, vermöge des Werthes, den man der Stelle der Ziffern beylegt (10. §.).

3ter Fall. Wenn der Multiplicator mehrere Ziffern enthält. Man nehme nach der Reihe die Vielfachen des Multiplicands, welche durch die Einer, die Zehner, die Hunderte des Multiplicators u. s. w. angezeigt werden, und addire alle diese Vielfache zusammen, so erhält man das ganze Produkt. Beyspiel:

7432
896

44592 das Sechsfache
668880 das Neunzigfache
5945600 das Achthundertfache

6659072 Produkt

In der Ausübung kann man die Nullen hinter dem Vielfachen der Zehner, der Hunderte, weglassen, wenn man nur das Vielfache der Zehner unter der Stelle der Zehner, das Vielfache der Hunderte unter der Stelle der Hunderte u. s. w. zu schreiben anfängt. Hieraus fliesset die Regel: man rücke die einzelnen Vielfache immer um eine Stelle weiter zur Linken, so oft man mit einer höhern Stelle des Multiplicators zu multipliciren anfängt. Kommen Nullen in dem Multiplicator vor, so muß man die Vielfache auch wegen eines jeden o in dem Multiplicator um eine Stelle weiter fortrücken. Beyspiel.

9824
7023
29472
19648
68768
68993952

29) Anmerkung. Hülfsmittel der Multiplication sind der Rechenknecht (eine Tafel der Vielfachen des Multiplicands) die Nepperischen Stäbchen, ein geschwinder Rechenknecht. Auch gehört hierher Grusons Rechenmaschine Magdeburg 1790. Zusammengesetztere, aber weit vollständigere, Rechenmaschinen, wie die Leibnitzische, Hahnische, Müllerische, gehören in die Maschinenlehre.

Von der Division.

30) Erklärung. Dividiren heißt eine Zahl in soviel gleiche Theile theilen als eine andere anzeigt. Jene Zahl heißt der Dividend, diese der Divisor, der gesuchte Theil der Quotient. Das Zeichen der Division sind zwey Punkte, die man zwischen den Divisor und den Dividend, wovon jener rechter dieser linker Hand

steht, setzt, oder ein Strich, indem man den Dividend oben, den Divisor unten hin schreibt.

$$8 : 4 = 2 \text{ oder } \frac{8}{4} = 2$$

31) Satz. Wenn man den Quotienten mit dem Divisor multipliciret, so erhält man den Dividend wieder. Denn man nimmt alsdann einen Theil so vielmal als Theile in dem Dividenden enthalten sind. Nun ist es aber einerley, ob man den Quotienten durch den Divisor, oder den Divisor durch den Quotienten multipliciret (25). Man verwechsele die Ordnung der Factoren, so erhellet, daß nicht nur der Quotient der sovielte Theil des Dividends ist als der Divisor anzeigt, sondern daß auch der Divisor so vielmal in dem Dividenden enthalten ist, als der Quotient anzeigt. Beyspiel.

$$40 : 8 = 5, \text{ und } 5 \cdot 8 = 8 \cdot 5 = 40.$$

Hieraus fliesset folgende Regel den Quotienten zu finden: Man nehme den Divisor so oft aus dem Dividenden weg, als angeht und bemerke, wie viel mal dieses geschehen ist; diese Zahl ist der Quotient.

32) Anmerkung. Es würde auch hier zu weitläuftig seyn, wenn man den Divisor einzeln von dem Dividenden wegnehmen wollte. Man nimmt ihn daher aus den höhern Stellen des Dividenden gleich so viel hundert, so viel tausend mal weg als angeht, und dieses abgekürzte Verfahren heißt eigentlich die Division.

33) Aufgabe. Eine ganze Zahl durch eine andere ganze Zahl zu dividiren.

1ter Fall, wenn der Divisor nur eine Ziffer enthält. Man untersuche vermittelst des Ein mal Eins, wie vielmal der Divisor in der höchsten Stelle des Dividends, oder in den beiden höchsten Stellen (wenn die erste Ziffer des Dividends kleiner ist, als der Divisor) enthalten ist, und schreibe die Zahl, welche dieses Viel-

fache ausdrückt, in den Quotienten, und so viel Nullen hinter dieselben als Ziffern hinter der Zahl des Dividends stehen, mit welcher man den Divisor verglichen hat. Das Vielfache des Divisors schreibe man unter die gehörige Stelle des Dividends und ziehe es von derselben ab. Zu dem Rest bringe man die folgende Ziffer des Dividends und verfahre mit dieser Zahl, wie man bey der ersten Stelle, oder den beyden ersten Stellen des Dividends verfahren ist, und so fort, bis man den Divisor nicht mehr aus dem Dividenden wegnehmen kann. Die einzelnen durch die Division gefundene Zahlen zusammengenommen geben den Quotienten.

Beyspiel:

9|63999|7000
63 | 100
9 | 10
9 | 1
9 | 7111 Quotient
9
9
9

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet von selbst. Wenn in unserm Beyspiel 9 in 63 7 mal enthalten ist, so ist es auch in 63000 7000 mal enthalten. Man nimmt es also aus 63000 7000 mal, aus 900 100 mal, aus 90 10 mal, aus 9 1 mal weg. Schreibt man die einzelnen Theile des Quotienten gleich hinter einander, so kann man die Nullen hinter iedem Theil weglassen. So verfährt man in der Ausübung.

Beyspiel:

```
3|7281|2427
 6:::|
 ---
 12::
 12
 ---
 ::8:
  6:
 ---
  21
  21
 ---
  ::
```

2ter Fall, wenn der Divisor mehrere Ziffern enthält. Man vergleiche von den höchsten Stellen des Dividends so viele als der Divisor Ziffern enthält, oder eine mehr, wenn der Divisor größer ist als gleichviel Stellen des Dividends, mit dem Divisor, suche das Vielfache des Divisors, welches diesen Stellen des Dividends am nächsten kommt, bemerke die Zahl des Vielfachen in dem Quotient, und ziehe das Vielfache selbst von den höchsten Stellen des Dividends ab. Uebrigens verfahre man weiter eben so wie in dem 1ten Fall. Zur Erleichterung der Rechnung vergleicht man anfangs nicht den ganzen Divisor, sondern nur die höchste Stelle desselben mit den höchsten Stellen des Dividends, indem man voraus setzt: die höchste Stelle des Divisors sey eben so oft als der ganze Divisor in dem Dividenden oder einem Theile desselben enthalten. Diese Voraussetzung kann trügen, indem die höchste Stelle des Divisors mehrere mal als der ganze Divisor in dem Dividend oder einem Theil desselben enthalten seyn kann, alsdann findet man den Quotienten zu groß. Dieser Irrthum entdeckt sich dadurch, daß man das Vielfache des Divisors nicht von dem Dividenden abziehen kann. Man vermindere alsdann die gefundene Zahl des Quotienten, so lange bis der Abzug statt

findet. Uebung macht, daß man bald die richtige Zahl des Quotienten trift. Beyspiel:

$$\begin{array}{r|l|l} 28 & 1372 & 40 \\ & 112 & 9 \\ \hline & 252 & \\ & 252 & \\ \hline & \cdots & \end{array} = 49$$

34) Anmerkung. Erhält man mitten in der Division einen Theil des Dividenden, welcher kleiner ist, als der Divisor, so bringe man zu dem Rest statt einer, zwey oder überhaupt so viele Ziffern, bis die Zahl grösser ist, als der Divisor, und schreibe den zu findenden Theil des Quotienten so viele Stellen zur Rechten, als man Ziffern von dem Dividenden herunter gethan hat. Folgendes Beyspiel erläutert diesen Fall.

$$\begin{array}{r|l|l} 868 & 874306 & 1007 \text{ Quotient} \\ & 868''' & \\ \hline & 6506 & \\ & 6076 & \\ \hline & 230 \text{ Rest} & \end{array}$$

Bleibet, wie in vorstehendem Exempel der Division ein Rest, welcher kleiner, als der Divisor ist, so würde zwar dieser Rest auch noch in so viel Theile getheilet werden können, als der Divisor anzeigt. Ein solcher Theil aber müßte kleiner, als die Einheit werden. Es wird ein Bruch seyn (5). Wir verspahren daher die Betrachtung desselben bis zu der Lehre von den Brüchen. Das nunmehrte Verfahren bey der Division heißt das unter sich Dividiren, weil man hierbey die Vielfache des Divisors unter den Dividenden und die Reste unter beyde schreibt. Das über sich Dividiren unterscheidet sich von dem unter sich Dividiren nicht sowohl dadurch, daß man die Reste über den Dividenden schreibt, als vielmehr, daß man die Vielfachen des Divisors nicht wirk-

lich hinschreibt, sondern sie gleich im Sinn von den zugehörigen Stellen des Dividends abzieht. Dadurch erspahret man zwar Raum und Zeit, das Gedächtniß wird aber mehr angestrengt, und dadurch leichter Anlaß zu Fehlern gegeben, welche, wenn sie begangen worden sind, sich bey dem über sich Dividiren nicht so leicht entdecken lassen, als bey dem unter sich Dividiren. Ein Beyspiel mag jenes Verfahren erläutern.

(3
3 6(0 Rest
7 1 1
2 6(2
Dividend 3 7 4 8 2 | 65 Quotient.
Divisor 5 7 2 2 |
5 7

35) Satz. Die Multiplication und Division dienen sich einander wechselsweise zur Probe. Das Produkt dividirt durch den Multiplicator giebt den andern Factor, den Multiplicand. Der Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt den Dividend. Ist bey der Division ein Rest geblieben, so addire man denselben entweder zu dem Produkt aus dem Quotienten in den Divisor, oder man subtrahire ihn von dem Dividenden.

572
65
2860
3432
37180
302 Rest.
37482 Probe (34)
oder 37482 Dividend (34)
302 Rest.
37180 = 572 × 65.

Diese Proben sind zwar zuverläßig, aber etwas weitläuftig. Eine kürzere Probe auf die Multiplication ist folgende: Man werfe aus den Ziffern des Multiplicators und Multiplicands 9 so oft weg als angeht, und bemerke die beyden Reste. Aus dem Produkte dieser Reste werfe man 9 wieder weg, der Rest muß dem Reste, wenn 9 aus den Ziffern des Produkts weggeworfen wird, gleich seyn. Beyspiel:

784 (1
32 (5
1. 5 Produkt der Reste.
1568
2352 (5 2ter Rest.
25088 (5 Rest.

Eben diese Probe kann bey der Division gebraucht werden, wenn man den Dividenden, als das Produkt aus dem Quotienten in den Divisor ansieht. Bleibt bey der Division ein Rest, so muß man diesen vorher von dem Dividenden hinwegnehmen.

Beyspiel: 823|74894|91
|7407|
824
823
1

Probe: 823. 91 = 74893 = 74894 — 1.
(4 . (1 4 Rest.
4 Rest.

Diese Probe beruhet auf folgendem Satz: Das Produkt zweyer Zahlen, welche keine Vielfache von 9 sind, läßt bey der Division mit 9 denselben Rest, welcher aus dem Produkte der Reste der Factoren bleibt. Man drücke die Factoren durch ihre Vielfache von 9 und die Reste aus, so hat man im 1ten Beyspiel,

784 = 783 + 1 = 87. 9 + 1, 32 = 27 + 5 = 3. 9 + 5.

Nun ist es einerley, ob man alle Theile mit einander, oder das Ganze mit dem Ganzen multiplicirt. Es ist aber

$$\begin{array}{rl} & 783. + 1 \text{ multiplicirt} \\ \text{mit} & 27. + 5 \\ \hline = & 783. \ 5 + 1. 5 \\ & 783. \ 27 + 1. 27 \\ \hline & 783. 27 + 783. 5 + 1. 27 + 1. 5 \end{array}$$

Die drey ersten Theile sind Vielfache von 9 und der letzte ist das Produkt der Reste der Factoren. Folglich bleibt in dem ganzen Produkt bey der Division mit 9 derselbe Rest, welcher aus dem Produkte der Reste der Factoren bleibt. Bey der Probe dividirt man nicht wirklich mit 9, sondern man wirft es blos aus der Summe der Ziffern weg, weil dieß nach §. 23 einerley Rest giebt.

36) **Anmerkung.** Die §. 29. angeführten Hülfsmittel der Multiplication können auch mit Vortheil bey der Division gebraucht werden.

Die vier betrachteten Rechnungsarten heißen die vier Species der Arithmetik. Ihre Anwendung im gemeinen Leben ist sehr mannichfaltig. Ueberdieß gründen sich fast alle Veränderungen, die man mit den Zahlen vornehmen kann, auf diese vier Species der Arithmetik, oder setzen sie wenigstens voraus. Bey der Anwendung derselben auf Gegenstände des gemeinen Lebens kommt häufig die Rechnung mit benannten Zahlen, d. i. solchen Zahlen vor, deren Einheiten einen bestimmten Werth haben. Wenn man den Werth der verschiedenen Einheiten gehörig kennt, um eine in die andere verwandeln zu können, so sind die Vorschriften zu solchen Rechnungen sehr bald erlernet. Einige Beyspiele werden dazu hinreichen.

37) Aufgabe. Benannte Zahlen zu addiren. Man schreibe die Zahlen, welche sich auf einerley Einheiten beziehen, unter einander, und rechne die Einheiten von jeder Gattung besonders zusammen, indem man bey der kleinsten anfängt. Beträgt die Summe der kleineren Einheiten eine oder etliche Einheiten von der nächst größeren Gattung, so verwandele man sie vermittelst der Division in die Einheit der größeren Gattung, und schreibe nur den Rest unter die kleineren Einheiten; den Quotienten aber rechne man zu den höhern Einheiten. Beyspiel:

fl.	kr.	pf.
123	18	3
4624	19	1
732	37	2
5480	15	2

38) Aufgabe. Benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Nachdem man die Einheiten von jeder Gattung gehörig unter einander geschrieben hat, so fange man die Subtraction bey der kleinsten Gattung an, und schreite so fort bis zu der größten, damit man nöthigen Falls eine größere Einheit zu den kleineren lehnen kann, wenn der Abzug nicht geradezu gemacht werden könnte. Beyspiel:

Wie alt ist jemand, welcher den 12ten September 1756 gebohren ist, an Jahren, Monaten und Tagen, den 11ten Junius 1798?

Man ziehe das Alter der Geburt von der Jahreszahl ab, so beantwortet der Rest die Frage.

Jahre	Monate	Tage
1798	5	11
1756	8	12
41	8	29

den Monat zu 30 Tage gerechnet.

39) Auf-

39) Aufgabe. Eine benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliciren. Man multiplicire zuerst die kleineren Einheiten, verwandele sie nöthigen Falls in größere, und addire was herauskommt zu dem Produkt der größern.

Beyspiel. Wie viel gemeine Jahre zu 365 Tagen sind in 100 astronomischen Sonnenjahren enthalten, wenn das astronomische Sonnenjahr 365 Tage, 5 Stunden, 49 Minuten enthält?

Tag.	Stund.	Min.
365	5	49
24	81	100
36524	581	4900
	5	40

macht 100 Jahre 24 Tage 5 Stunden 40 Minuten.

40) Aufgabe. Eine benannte Zahl durch eine unbenannte zu dividiren. Man fange die Division bey den größern Einheiten an, verwandle den Rest in kleine Einheiten, addire ihn zu denselben, und fahre so fort mit der Division bis zu Ende. Beyspiel.

Die Summe von 4000 fl. 15 kr. in 4 gleiche Theile zu theilen.

	fl.	kr.	
4 :	4000	15	
	1000	3	3 Rfg.

II. Abschnitt.

Von den Primzahlen, den zusammengesetzten Zahlen und den Brüchen.

41) Erklärung. Alle Zahlen gehen durch sich selbst und durch die Einheit dividirt auf. Solche ganze Zahlen, die nur durch sich selbst und durch die Einheit, aber durch keine andere ganze Zahl, dividirt aufge-

hen, heißen einfache Zahlen, Primzahlen, auch absolute Primzahlen. Zusammengesetzte Zahlen sind solche, welche durch andere ganze Zahlen dividirt aufgehen.

Die Reihe der Primzahlen ist folgende:

1 2 3 5 7 11 13 17 19. u. s. w.

Ein allgemeines Gesetz für den Fortgang dieser Reihe hat man bis jetzt nicht entdeckt. Alle Zahlen, welche nicht in dieser Reihe vorkommen, sind zusammengesetzte Zahlen.

42) Satz. Alle zusammengesetzte Zahlen entstehen aus der Multiplication von zwey oder mehreren Primzahlen. Denn man suche diejenigen Zahlen, durch welche die zusammengesetzte Zahl dividirt aufgeht. Diese Zahlen sind entweder Prim- oder selbst zusammengesetzte Zahlen; im letzten Fall suche man aufs neue die Zahlen, durch welche sie dividirt aufgehen, und so fort, bis man endlich Zahlen erhält, welche sich nicht weiter dividiren lassen. Aus allen Divisoren und Quotienten erhält man rückwärts durch die Multiplication wieder den ersten Dividenden, oder die zusammengesetzte Zahl. Also kann jede zusammengesetzte Zahl, als ein Produkt aus mehrern Primzahlen, als Factoren, angesehen werden. Man nennt die Factoren, welche in einer zusammengesetzten Zahl vorkommen, die Theiler der Zahl, wenn es Primzahlen sind, die einfachen Theiler. Beyspiel:

$24 = 12 \cdot 2$; $12 = 2 \cdot 6$; $6 = 2 \cdot 3$ also $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ welche mit 1 die einfachen Theiler dieser Zahl sind.

43) Anmerkung. Man hat Tafeln über die einfachen Theiler der zusammengesetzten Zahlen berechnet. Diese Tafeln sind nicht nur bey der Rechnung mit Brüchen, sondern insbesondre in der höhern Rechenkunst mit vielem Vortheil zu gebrauchen.

44) Satz. Wenn eine Zahl in der andern aufgehen soll, so muß sie in derselben als Factor enthalten seyn, und umgekehrt, wenn eine Zahl als Factor in einer andern vorkommt, so geht sie in derselben auf. Denn wenn eine Zahl in einer andern aufgehen soll, so muß diese ein Vielfaches von jener und dem Quotienten seyn, und wenn sie das ist, so geht die Division auf.

45) Erklärung. Eine Zahl, welche in einer andern Zahl aufgeht, heißt das Maaß dieser Zahl. Wenn eine Zahl in zwey oder mehr Zahlen zugleich aufgeht, so ist sie ein gemeinschaftliches Maaß dieser Zahlen. Zahlen, welche kein gemeinschaftliches Maaß haben, heißen Primzahlen unter sich.

46) Anmerkung. Alle absolute Primzahlen sind zugleich Primzahlen unter sich, aber nicht umgekehrt.

47) Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maaß zweyer Zahlen zu finden.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl selbst das größte gemeinschaftliche Maaß; geht die Division nicht auf, so dividire man mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor; geht hier die Division auf, so ist dieser Rest das gesuchte gemeinschaftliche Maaß. Sollte auch hier die Division nicht aufgehen, sondern ein neuer Rest bleiben, so setze man diese Arbeit so lange fort, indem man immer mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor dividirt, bis endlich die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist das gesuchte Maaß. Sollte die fortgesetzte Division gar nicht aufgehen, sondern endlich ein Rest $= 1$ bleiben, so zeigt dieß an, daß diese Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß außer der Einheit haben, und also Primzahlen unter sich sind. Beyspiel.

Für 36 und 12 ist 12 das größte gemeinschaftliche Maaß selbst, dann $36 : 12 = 3$; für 40 und 12 hat man

$$\begin{array}{r|l|l} 12 & 40 & 3 \\ & 36 & \\ \hline 4 & 12 & 3 \\ & 12 & \\ \hline \end{array}$$

giebt 4 als das größte gemeinschaftliche Maaß, denn $12 = 3 \cdot 4$
und $40 = 3 \cdot 12 + 4$, d. i. eine Zahl, die in 12 und 40 zugleich aufgehen soll, muß auch in 4 aufgehen, damit sie in der Summe von $3 \cdot 12 + 4$ aufgeht. In 4 geht aber keine größere Zahl als 4 selbst auf, folglich ist 4 das größte gemeinschaftliche Maaß für 40 und 12.

Für 56 und 12

$$\begin{array}{r|l|l} 12 & 56 & 4 \\ & 48 & \\ \hline 8 & 12 & 1 \\ & 8 & \\ \hline 4 & 8 & 2 \\ & 8 & \\ \hline \end{array}$$

hat man 4 als das größte gemeinschaftliche Maaß, denn es ist $56 = 4 \cdot 12 + 8$.
$12 = 1 \cdot 8 + 4$.
daher 4 die größte Zahl, welche in 4 und 8, folglich in $12 = 8 + 4$, und in $56 = 4 \cdot 12 + 8$ aufgeht.

Für 54 und 17 hat man

$$\begin{array}{r|l|l} 17 & 54 & 3 \\ & 51 & \\ \hline 3 & 17 & 5 \\ & 15 & \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ & 2 & \\ \hline 1 & & \end{array}$$

also 54 und 17 Primzahlen unter sich.

48) Anmerkung. Die Methode des vorhergehenden Paragraphs entdeckt zwar allgemein das größte gemeinschaftliche Maaß zweyer Zahlen, wenn die Zahlen keine Primzahlen unter sich sind. Wenn man indessen bloß einen gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen sucht, so kann man durch Probiren oft kürzer zu seinem Zweck kommen, und um hierbey nicht blindlings herumzutappen, so bemerke man folgende Kennzeichen der Theilbarkeit. Alle Zahlen, welche sich durch 2 dividiren lassen, heißen gerade Zahlen. Es ist aber eine Zahl gerade, wenn ihre letzte Ziffer gerade ist, denn man kann jede Zahl als eine Summe von Zehnern und ihrer letzten Ziffer (dem Einer) ansehen: jeder Zehner ist aber eine gerade Zahl, folglich die ganze Zahl, wenn es die letzte Ziffer ist. Jede Zahl, welche durch 9 theilbar ist, ist auch durch 3 theilbar. Es ist aber eine Zahl durch 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern es ist, folglich ist eine Zahl auch durch 3 theilbar, wenn 3 in der Summe ihrer Ziffern aufgeht. Jede Zahl, welche durch 2 und durch 3 theilbar ist, ist auch durch $2 \cdot 3 = 6$ theilbar. 5 geht in einer Zahl auf, wenn es in der letzten Ziffer aufgeht, denn in den Zehnern geht es auf, folglich auch in der Zahl, wenn es in den Einern aufgeht. Jede Zahl, welche hinten Nullen hat, läßt sich so vielmal mit 10 dividiren, als Nullen in den letzten Stellen stehen, also auch eben so vielmal mit 5 und mit 2.

49) Satz. Wenn man eine Zahl durch eine andere dividiren soll, welche kein gemeinschaftliches Maaß mit derselben hat, so geht zwar die Division nicht auf, indessen wird doch der Quotient eine bestimmte Größe haben. Um ihn zu finden, theile man nicht den ganzen Dividenden, sondern jede Einheit des Dividenden in so viel gleiche Theile, als der Divisor anzeigt, und nehme von diesen gleichen Theilen so viel, als Einheiten in dem Dividenden enthalten sind, so wird der Bruch, welcher

hier entstehet, der gesuchte Quotient seyn. Man soll z. B. 8 Ellen in 6 gleiche Theile theilen. Ein solcher Theil läßt sich nicht in ganzen Ellen ausdrücken. Man nehme daher von jeder der 8 Ellen den 6ten Theil, so wird der Bruch acht sechstheil $(\frac{8}{6})$ Ellen der gesuchte Quotient seyn. In den Begriff eines Bruchs kommen daher nothwendig zwey Größen, die eine, der Nenner oder Name des Bruchs, zeigt an, in wie viel gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, die andere, der Zähler, wie viel von diesen Theilen genommen worden sind. Jeder Bruch ist zugleich ein Quotient, dessen Dividend der Zähler, und dessen Divisor der Nenner des Bruchs ist. Man schreibt daher Brüche auch wie Quotienten, den Zähler oben, den Nenner unten hin, und zwischen beyde einen Strich.

50) Anmerkung. Wenn der Dividend oder Zähler kleiner ist als der Divisor oder Nenner des Bruchs, so kann die Division auf keine andere als die vorhin gelehrte Weise verrichtet werden. Solche Brüche heißen ächte Brüche, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ u. s. w. Unächte Brüche nennt man, deren Zähler größer sind als die Nenner, z. B. $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$ u. s. w. Ferner unterscheidet man eigentliche und uneigentliche Brüche. Unter den ersten versteht man solche Brüche, welche sich bey unveränderter Größe der Einheit nicht auf ganze Zahlen zurückbringen lassen, unter uneigentlichen Brüchen solche, die dieß gestatten. Beyspiel:

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{3}$ eigentliche Brüche, $\frac{15}{3} = 5$ ein uneigentlicher Bruch.

Uebrigens erhellet aus (7), daß man sich jeden Bruch auch als eine ganze Zahl vorstellen kann, sobald man den Theil der Einheit, welchen der Nenner des Bruchs anzeigt, als ein Ganzes betrachtet. Mit andern Worten, man kann sich Brüche auch als benannte Zahlen denken, wobey der Nenner die Beschaffenheit, und

der Zähler die Menge der Einheiten ausdrückt, $\frac{5}{12}$ eines Fußes sind 5 Zoll, wenn man $\frac{1}{12}$ eines Fußes einen Zoll nennt. Wir werden uns in der Folge bald der einen, bald der andern Vorstellungsart von den Brüchen bedienen, um daraus die Sätze herzuleiten, auf welche sich die Veränderungen gründen, welche man mit den Brüchen vornehmen kann.

51) Satz. Jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandeln, dessen Zähler den Nenner so vielmal enthält, als die ganze Zahl die Einheit. z. B.

$$4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} \text{ u. s. w.}$$

Denn jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind, ist $= 1$, weil alle Theile dem Ganzen gleich sind, folglich enthält ein Bruch so vielmal eins, als der Nenner in dem Zähler enthalten ist. Man kann daher auch die ganze Zahl, welche in einem unächten Bruche enthalten ist, finden, wenn man mit dem Nenner in den Zähler dividirt. Geht die Division auf, so war der unächte Bruch zugleich ein uneigentlicher. Beyspiel:

$$\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}, \quad \frac{21}{3} = 7.$$

Wenn man einen unächten Bruch durch eine ganze Zahl und einen ächten Bruch ausdrückt, so nennt man diesen Ausdruck eine gemischte Zahl. Eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln, multiplicire man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, addire zu dem Producte den Zähler, diese Summe ist der Zähler des unächten Bruchs, der Nenner ist der Nenner des ächten Bruchs.

$$5\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

52) Satz. Wenn man eines Bruchs Zähler mit einer ganzen Zahl multipliciret, den Nenner aber ungeändert lässet, so wird der Bruch so vielmal größer, als der Zähler größer geworden ist. Denn alsdann ändert

lasse den Zähler ungeändert, und multiplicire den Nenner mit der ganzen Zahl. Beyspiel:

$$\frac{4}{6} : 2 = \frac{4:2}{6} = \frac{2}{6} \text{ oder } \frac{4}{6} : 2 = \frac{4}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12}$$

Des letzteren Verfahrens bedient man sich, wenn die Division des Zählers durch die ganze Zahl nicht aufgehen sollte.

Einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren. Man kehre den Divisor um, und multiplicire mit dem umgekehrten Bruch nach 58. §. Beyspiel:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

denn mit $\frac{2}{3}$ dividiren, heißt mit dem dritten Theil von 2 dividiren, der gesuchte Quotient wird also dreymal größer seyn als der Quotient, welchen man durch die Division mit 2 erhält. Nun ist aber $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$, welches mit 3 multiplicirt, $\frac{3}{8} \cdot 3 = \frac{9}{8}$ giebt. Hieraus fließet die obige Vorschrift.

60) Anmerkung. Wenn man die von 56 – 59 §§. gelehrten Rechnungen mit gemischten Zahlen verrichten sollte, so sind hierzu keine weitere Regeln nöthig, als folgende: man verwandele die gemischte Zahlen in unächte Brüche, und verfahre mit denselben nach den gegebenen Vorschriften. Oft ist es aber kürzer, die gemischte Zahlen in ihrer ursprünglichen Form beyzubehalten, und die Rechnung mit den Ganzen und den Brüchen besonders zu führen. Einige Beyspiele mögen dieß erläutern.

Addition.

$$4\frac{3}{4} + 7\frac{2}{3} = \frac{19}{4} + \frac{23}{3} = \frac{57}{12} + \frac{92}{12} = \frac{149}{12} = 12\frac{5}{12}$$

oder $4 + 7 = 11$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = 1\frac{5}{12}$$

ganze Summe $12\frac{5}{12}$

Subtraction.

$5\frac{1}{7} - 2\frac{1}{6} = \frac{36}{7} - \frac{13}{6} = \frac{156}{30} - \frac{78}{30} = \frac{78}{30} = 2\frac{18}{30}$
oder $5\frac{1}{7} = 5\frac{6}{30}$
$- 2\frac{1}{6} = 2\frac{13}{30}$
Unterschied $2\frac{18}{30}$.

Multiplication.

$18\frac{5}{12} \cdot 4 = \frac{221}{12} \cdot 4 = \frac{884}{12} = 73\frac{8}{12}$ oder
$18\frac{5}{12} \cdot 4 = 18.4 + \frac{5}{12} \cdot 4$
$18. 4 = 72$
$\frac{5}{12} \cdot 4 = 1\frac{8}{12}$
Product $73\frac{8}{12}$

Division.

$48\frac{2}{3} : 8\frac{1}{3} = \frac{146}{3} : \frac{25}{3} = \frac{146}{3} \cdot \frac{3}{25} = \frac{146}{25} = 5\frac{21}{25}$

III. Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen.

61) Erklärung. Brüche, deren Nenner eine Zahl aus folgender Reihe 10, 100, 1000, 10000 u. s. w., der Zähler aber irgend eine ganze Zahl ist, heißen Decimalbrüche. Z. B. $\frac{5}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{3}{1000}$ u. s. w. Die Reihe $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, u. s. w. enthält die Einheiten der verschiedenen Ordnungen der Decimalbrüche. Es findet bey ihnen dasselbe Gesetz, wie bey den Ordnungen der ganzen Zahlen statt; es ist nämlich jede Einheit der folgenden Ordnung von der Rechten zur Linken gelesen 10 mal größer, als eine Einheit der nächst vorhergehenden Ordnung.

$\frac{1}{10}$ = 10 Hunderttheilen, $\frac{1}{100}$ = 10 Tausendtheilen, $\frac{1}{1000}$ = 10 Zehntausendtheilen u. s. w. Aus dieser Ursache kann man sich bey den Decimalbrüchen

derselben Bezeichnungsart, wie bey den ganzen Zahlen bedienen; das ist, man kann den Werth des Nenners, welcher die Ordnung des Decimalbruches bestimmt, durch die Stelle, worin man den Zähler schreibt, andeuten. Die Stelle der Ganzen unterscheidet man durch ein Comma von den Stellen der Decimalbrüche; so ist

$$0,2 = \frac{2}{10}$$
$$0,03 = \frac{3}{100}$$
$$4,721 = 4 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$$

62) Anmerkung. Diese Bezeichnungsart gewährt nicht blos den Vortheil, daß man die Nenner der Decimalbrüche nicht hinzuschreiben braucht, sondern durch sie wird die Rechnung mit Decimalbrüchen in eine Rechnung mit ganzen Zahlen verwandelt, welches, wie die Folge zeigen wird, die Arbeit ungemein erleichtert. Es wäre daher zu wünschen, daß man — so wie dieß in mathematischen Schriften bereits geschiehet — auch in dem gemeinen Leben anfienge, statt der gewöhnlichen Brüche, Decimalbrüche zu brauchen. (Man sehe hierüber nach: Beyträge zum allgemeinen Gebrauch der Decimalbrüche, oder Tafeln, welche alle gemeine Brüche von 1–1000, nebst Anweisung, die übrigen zu finden, mit vielen Anwendungen enthalten, v. W. F. Wucherer, Markgräfl. Bad. Rath und Prof. der Math. Carlsruhe bey Macklot 1795.)

63) Aufgabe. Decimalbrüche von verschiedenen Nennern unter einerley Benennung zu bringen. Man lese jeden Decimalbruch zusammen als eine ganze Zahl, und gebe ihm zum Nenner den Nenner der letzten Stelle. Sind in dem einen Decimalbruch weniger Decimalstellen, als in dem andern, so hänge man an den ersten so viele Nullen, bis er eben so viele Decimalstellen erhält.

Beyspiel. $0,374 = \frac{374}{1000}$ Denn es sind

$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$

$\frac{7}{100} = \frac{70}{1000}$

$\frac{4}{1000} = \frac{4}{1000}$

also die Summe $= \frac{374}{1000}$

$0,25 = \frac{25}{100}$

$3,2 = 3,20 = \frac{320}{100}$

Eine Null, oder mehrere Nullen hinter einem Decimalbruch geschrieben, ändert den Werth des Decimalbruches nicht, denn dieser Werth hängt von den Stellen seiner bedeutenden Ziffern ab, und diese werden durch die Stellen des Comma bestimmt.

64) Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, wenn man das Comma um 1, 2, 3 Stellen zur rechten Hand rückt, hingegen mit 10, 100, 1000 u. s. f. dividirt, wenn man das Comma um 1, 2, 3 Stellen u. s. f. zur linken Hand rückt.

Dieß erhellet aus der Art, wie die Decimalbrüche geschrieben werden. Zur Erläuterung für Anfänger schreibe man die Decimalbrüche als gewöhnliche Brüche, und verrichte so die Multiplication oder Division, $10 \cdot 0,4 = 4,0$, denn es ist $10 \cdot \frac{4}{10} = \frac{40}{10} = 4$

$100 \cdot 0,234 = 23,4$, denn $\frac{234}{1000} = \frac{23460}{1000} = \frac{2340}{100} = 23\frac{4}{10}$.

Ueberhaupt wird ein Decimalbruch 10 mal, 100 mal größer, wenn jede seiner Einheiten 10 mal, 100 mal größer wird, das ist, wenn sie um 1, 2 Stellen weiter zur Linken, oder das Comma um 1, 2 Stellen weiter zur rechten Hand rückt.

$36,0 : 100 = 0,36$

$3,6 : 100 = 0,036$

denn $36 : 100 = \frac{36}{100}$ und $\frac{36}{10} : 100 = \frac{36}{1000}$.

Ueberhaupt wird ein Decimalbruch 10 mal, 100 mal kleiner, wenn alle seine Ziffern 10 mal, 100 mal kleiner werden, d. i. wenn das Comma um 1, 2 Stellen weiter zur linken Hand rückt.

65) Aufgabe. Decimalbrüche zu addiren. Man schreibe die Decimalstellen von einerley Ordnung gehörig unter einander, und verfahre wie mit ganzen Zahlen. Beyspiel:

37,456
0,704
86,291
752,004
876,455 Summe.

66) Aufgabe. Decimalbrüche von einander zu subtrahiren. Man schreibe die Decimalstellen gehörig unter einander, d. i. Comma unter Comma, und verfahre wie bey ganzen Zahlen.

Beyspiel:
37,456
0,394
37,062

67) Aufgabe. Decimalbrüche zu multipliciren. Man multiplicire wie mit ganzen Zahlen, und schneide von dem erhaltenen Produkte so viele Decimalstellen ab, als in beyden Factoren zusammen enthalten sind. Sind in dem Produkte nicht Ziffern genug, dieß zu thun, so schreibe man so viel Nullen davor, bis man die Summe der Decimalstellen der Factoren erhält.

Beyspiel:

0,123	0,472
16	0,085
738	2 360
1 23	37 76
1,968	0,040 120

denn es ist $\frac{123}{1000} \cdot 16 = \frac{1968}{1000} = 1\frac{968}{1000}$; $\frac{472}{1000} \cdot \frac{85}{1000} = \frac{472 \cdot 85}{1000 \cdot 1000} = \frac{40120}{1000000}$.

Ueberhaupt hat jeder Decimalbruch so viel Decimalstellen als sein Nenner Nullen enthält. Der Nenner des Produkts hat so viel Nullen, als die Summe

der

der Nullen in den Nennern der Factoren beträgt; folglich muß auch das Produkt so viel Decimalstellen erhalten, als die Summe der Decimalstellen in den Factoren beträgt.

68) Aufgabe. Decimalbrüche zu dividiren.

1ter Fall. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ist. Man verrichte die Division wie bey ganzen Zahlen, und schneide hierauf von dem Quotienten so viel Decimalstellen ab, als der Dividend enthält. Denn der Quotient, als ein Theil des Dividenden, bezieht sich auf eben die Einheiten, welche in dem Dividenden enthalten sind.

Beyspiel. 0, 36963 : 27

27	0, 37963	0, 01369
	27	
	99	
	81	
	186	
	162	
	243	
	243	
	000	

2ter Fall, wenn der Divisor ein Decimalbruch ist. Man verwandle den Divisor in eine ganze Zahl dadurch, daß man das Comma hinten hinrückt, und verfahre, nachdem man das Comma um eben so viele Stellen in dem Dividenden weiter zur Rechten geschrieben hat, wobey nöthigen Falls Nullen an dem Dividenden gehängt werden, wie in dem vorhergehenden Fall. Denn dadurch, daß man das Comma in dem Divisor und Dividenden um gleich viel Stellen zurück rückt, werden beyde gleich viel kleiner, und der Quotient bleibt unverändert.

Beyspiel: 7,325 : 0,846 = 7325 : 846,

846	7325	8
	6768	
	557	Rest.

0,837 : 0,4692 = 8370 : 4692,

4692	8370	1
	4692	
	3678	Rest.

Wenn bey der Division, wie in beyden vorstehenden Exempeln, ein Rest bleibt, so hänge man an denselben eine beliebige Anzahl von Nullen, und setze die Division weiter fort, der Quotient erhält alsdann so viele Decimalstellen, als man dem Dividenden gegeben hat. Oft geht die Division gar nicht auf, dieß zeigt an, daß der gesuchte Quotient sich in Decimaltheilen nicht vollkommen genau ausdrücken läßt. Man kann sich indessen durch eine fortgesetzte Division seinem wahren Werth so weit man will nähern. Im gemeinen Leben hat man nicht nöthig, dieß sehr weit zu treiben, da die Theile bald so klein werden, daß sie für Nichts zu halten sind. Meistens wird man sich schon mit Tausendtheilen befriedigen können. Das obige zweyte Exempel würde weiter gerechnet so aussehen:

4692	8370,0000	1,7838
	4692	
	3678,0	
	32844	
	3936'0	
	37536	
	1824'0	
	14076	
	4164'0	
	37536	
	4104	

Wollte man sich hier mit Tausendtheilen befriedigen, so würde man für den Quotienten richtiger 1,784 als 1,783 nehmen, denn in jenem hätte man 2 Zehntausendtheile zu viel, in diesem 8 Zehntausendtheile zu wenig genommen. Allgemein, wenn die weggelassene nächste Decimalstelle mehr als 5 beträgt; so nimmt man für die vorhergehende 1 mehr.

69) Aufgabe. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln. Man hänge an den Zähler so viele Nullen, als man von dem Quotienten Decimalstellen berechnen will, und dividire mit dem Nenner in den Zähler. Beyspiel:

$\frac{1}{4} = 3{,}00 : 4 = 0{,}75$

$\frac{2}{3} = 3|2{,}000|0{,}666$

18

20

18

20

18

2

So bald bey der Division ein Rest bleibt, welcher schon einmal geblieben ist, so ist dieß ein Beweis, daß die Division nicht aufgeht, und die Ziffern des Quotienten wiederholen sich von der Stelle an, wo derselbe Rest geblieben ist.

IV. Abschnitt.

Von den Potenzen und der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

70) Erklärung. Eine Potenz heißt ein Produkt von gleichen Factoren. Einer dieser Factoren heißt die Wurzel der Potenz. Die Anzahl der gleichen Factoren bestimmt den Grad, (Namen, Exponenten) der Potenz. So heißt z. B. ein Produkt aus zwey,

drey, vier gleichen Factoren die zweyte, dritte, vierte Potenz dieses Factors. Die zweyte Potenz nennt man auch das Quadrat, die dritte Potenz den Cubus oder Würfel.

Eine Zahl zu einer Potenz erheben, heißt die Zahl so viel mal in sich multiplicieren als der Grad der Potenz weniger eins ausdrückt. Denn der Grad der Potenz bestimmt die Anzahl der gleichen Factoren, und die gegebene Zahl macht einen Factor aus, welcher noch so vielmal mit sich multiplicieret werden muß, als die Zahl der Factoren weniger einen beträgt. Die Potenz einer Zahl zu schreiben, schreibe man die Zahl hin, und oben zur rechten Hand den Grad der Potenz.

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \; ; \; 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Die Wurzel aus einer Potenz ziehen, heißt einen der gleichen Factoren finden, durch deren Multiplication die Potenz entstanden ist. Diese arithmetische Operation anzuzeigen, schreibe man die Zahl hin, welche die Potenz andeutet, vor dieselbe dieses Zeichen $\surd$ in die Oeffnung des Wurzelzeichens den Grad der Potenz. Bedeutet es die Wurzel der zweyten Potenz, oder die Quadratwurzel, so schreibt man nichts in die Oeffnung des Wurzelzeichens. Beyspiel:

$$\surd 16 = 4 \; ; \; \sqrt[3]{27} = 3 \; ; \; \sqrt[4]{16} = 2$$

71) Anmerkung. So wie das Erheben zu einer Potenz durch eine wiederholte Multiplication einer Zahl mit sich selbst bewerkstelliget wird, eben so kann man die Ausziehung der Wurzeln als eine besondere Art der Division betrachten. Durch iene zerfällt man eine Zahl in gleiche, durch diese, in ungleiche Factoren. Die allgemeinen Vorschriften zur Ausziehung der Wurzeln müssen aus der Zusammensetzung der Potenzen hergeleitet werden. Die gemeine Arithmetik beschäftiget sich blos mit der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln.

72) Satz. Jedes Quadrat einer Zahl von einer Ziffer, zwey, drey, vier Ziffern, hat nicht mehr als 2, 4, 6, 8, und nicht weniger als 1, 3, 5, 7 Ziffern; überhaupt hat iedes Quadrat nicht mehr denn doppelt so viele Ziffern, und nicht weniger als doppelt so viel, weniger eine Ziffer als seine Wurzel. Für die Quadrate der Zahlen, welche nicht mehr als eine Ziffer haben, erhellet der Satz aus folgenden Täfelchen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Wurzeln
1	4	9	16	25	36	49	64	81	Quadrate

Für die Quadrate der Zahlen von mehrern Ziffern erhellet er folgendermassen 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. sind die kleinsten Zahlen von 2, 3, 4, 5 Ziffern, ihre Quadrate 100, 10000, 1000000, 100000000 die kleinsten Zahlen von 3, 5, 7, 9 Ziffern.

Also haben alle Quadrate, deren Wurzeln 2 Ziffern haben, 3 oder vier Ziffern; alle Quadrate, deren Wurzeln 3 Ziffern haben, 5 oder 6 Ziffern u. s. w., woraus der obige Satz fließet: Quadrate, deren Wurzeln 1, 2, 3 Ziffern haben, heißen ein- zwey- dreytheilige, überhaupt vieltheilige Quadrate, wenn die Wurzel mehr als zwey Ziffern hat.

73) Aufgabe. Aus einem zweytheiligen Quadrat die Wurzel zu ziehen. Um dieses zu thun, muß man vorher sehen, wie das Quadrat durch die Multiplication aus einer zweytheiligen Wurzel mit sich selbst entsteht. Folgendes Beyspiel mag dieß erläutern:

$$\begin{array}{rcl} & \text{I} & \text{II} \\ 34 & = 30 + & 4 \\ 34 & = 30 + & 4 \\ \hline 136 & & 16 = 4^2 = \text{II}^2 \\ 102 & & 120 = 30.4 = \text{I. II.} \\ \hline 1156 & & 120 = 4.30 = \text{II. I.} \\ & & 900 = 30^2 = \text{I}^2 \\ \hline & & 1156 = 30^2 + 2.(30.4) + 4^2 \end{array}$$

Es ist einerley, ob man das Ganze mit dem Ganzen, oder alle Theile mit einander multiplicirt. Durch das letzte Verfahren übersiehet man, aus welchen Theilen ein zweytheiliges Quadrat zusammengesetzt ist. Sie sind, wie aus beystehendem Exempel erhellet, folgende: Das Quadrat des Zehners, das doppelte Produkt aus dem Zehner in den Einer, und das Quadrat des Einers.

Nennt man den Zehner den ersten, den Einer den zweyten Theil, und bezeichnet jenen mit I, diesen mit II, so drückt folgende Formel die Theile eines jeden zweytheiligen Quadrates aus.

$$I^2 + 2\,I.\,II. + II^2.$$

Bey Ausziehung der Wurzel werden alle diese Theile nach der Reihe aus dem Quadrat weggenommen. Und dieß zu thun, muß man wissen, in welchen Stellen des Quadrates jeder dieser Theile enthalten ist. Aus (72) erhellet, daß das Quadrat des Zehners in der 1ten und 2ten, das Quadrat des Einers in der 3ten und 4ten Stelle (von der linken Hand gezählet) enthalten seyn muß. Man theile daher das Quadrat von der rechten zur linken in Classen von 2 Ziffern, so zeigt die Zahl der Classen, die Zahl der Theile in der Wurzel und zugleich, wo das Quadrat eines jeden Theiles enthalten ist, an (72). Das doppelte Produkt aus dem Zehner in den Einer, als eine Menge von Zehnern fängt sich unter der Stelle der Zehner an, und kann sich bis in die erste Classe erstrecken, aber nicht weiter; denn das doppelte Produkt des größten Einers in den größten Zehner $= 2.9.90$ ist kleiner als das Quadrat des kleinsten Hunderten $= 100^2$ und dieß ist nach (72) die kleinste Zahl von 5 Stellen. Die Rechnung selbst wollen wir an dem obigen Beyspiel erläutern.

I. II.
11|56|34
$I^2 = 9.$
25.
$2I = 6.$
$2I.II. = 24.$
16
$II^2 = 16$
'''

Man sehe, welches Quadrat der ersten Classe am nächsten kommt, die Wurzel davon ist der erste Theil. Das Quadrat dieses Theiles ziehe man von der ersten Classe ab, zu dem Rest bringe man die erste Stelle der zweyten Classe, dieses zusammen, sehe man als das doppelte Produkt des ersten Theiles in den zweyten an, dividire in dasselbe mit dem doppelten ersten Theil als einem Factor, um den zweyten Theil als den andern Factor zu erhalten, das Produkt des gefundenen zweyten Theils in den doppelten ersten ziehe man von dem Rest der ersten Classe und der hinzugeschriebenen Ziffer der zweyten Classe ab. Von dem Reste und der letzten Ziffer der zweyten Classe nehme man endlich das Quadrat des zweyten Theiles weg, so wird alles aufgehen, wenn die Zahl ein vollkommenes Quadrat war.

Anderes Beyspiel:

I. II.
97|43|98
$I^2 = 81$
164
$2I = 18$
$2I.II = 144$
203
$II^2 = 64$
139

Durch die Division des doppelten ersten Theils in den Rest der ersten und die erste Ziffer der zweyten Classe könnte man, wie in dem vorhergehenden Exempel, den zweyten Theil zu groß finden, weil in der Zahl, welche man dem doppelten Produkt der beyden Theile in einander gleich setzt, noch etwas von dem Quadrate des zweyten Theils enthalten seyn kann. Man entdeckt diesen Fehler, wenn man von dem Reste des doppelten Produkts und der letzten Ziffer der zweyten Classe das Quadrat des zweyten Theils nicht mehr wegnehmen kann. Alsdann muß man den gefundenen zweyten Theil so lange vermindern bis der Abzug statt findet. Sollte nach geschehenem Abzug noch ein Rest bleiben, so zeigt dieß an, daß die Zahl keine vollkommene Quadratzahl ist. Die Wurzel fällt alsdann zwischen zwey nächste ganze Zahlen hinein. In dem Exempel zwischen 98 und 99. Wie man eine solche Wurzel genauer findet, wird unten gezeigt werden.

74) Aufgabe. **Aus einem dreytheiligen Quadrat die Wurzel zu ziehen.**

Man suche durch die Multiplication der Wurzel mit sich selbst die einzelnen Theile, welche in dem dreytheiligen Quadrate enthalten sind, nehme dieselben nach der Reihe daraus weg, so findet man die Wurzel. Das Verfahren wird folgendes erläutert:

		|I+II|	III
172	=	170	+	2
172	=	170	+	2
344		4	+	2^2
1204		340	=	2. 170
172		340	=	170. 2
29584		28900	=	170^2

$170^2+2.(170.2)+2^2=29584$

Hieraus erhellet, daß, wenn man die beyden ersten Theile zusammen genommen, als einen ansieht, das dreytheilige Quadrat aus dem Quadrate der beyden ersten Theile zusammen genommen, dem doppelten Produkte der beyden ersten Theile zusammen genommen in den dritten Theil, und aus dem Quadrate des dritten Theils besteht. Das Quadrat der beyden ersten Theile besteht nach dem vorhergehenden Paragraph als ein zweytheiliges Quadrat selbst aus mehreren Theilen. Folgende Formel enthält alle Theile des dreytheiligen Quadrats.

$$\underline{I^2 + 2I.II + II^2} + 2(I+II).III + III^2$$

Das Unterstrichene macht zusammen das Quadrat der beyden ersten Theile aus. Dieses Quadrat ist gleich dem Quadrate des Hunderten und Zehners zusammen als Einer gelesen, multiplicirt in 100, denn $170^2 = (17.10)^2 = 17^2.10^2 = 17^2.100$. Es fängt sich daher in der Stelle der Hunderte an, und kann sich höchstens in die Stelle der Hunderttausende erstrekken (72). Man theile daher ein dreytheiliges Quadrat von der Rechten zur Linken in Classen von zwey Ziffern, so werden die beyden ersten Classen allein das Quadrat der beyden ersten Theile enthalten, und man findet diese beyden ersten Theile, wenn man aus den beyden ersten Classen die Wurzel eines zweytheiligen Quadrates ausziehet. Aus dem Reste und der dritten Classe werden alsdann die beyden für das dreytheilige Quadrat noch hinzukommenden Theile hinweggenommen. Das doppelte Produkt der beyden ersten Theile in den dritten fängt sich, als eine Menge von Zehnern, unter der Stelle der Zehner, d. i. unter der ersten Ziffer der heruntergeschriebenen 3ten Classe an, das Quadrat des dritten Theils hingegen unter der letzten Ziffer der letzten Classe. Man findet den dritten Theil aus den beyden ersten doppelt genommen durch die Division in den

Rest, und die erste Ziffer der dritten Classe eben so, wie man aus dem ersten Theile den 2ten gefunden hat.

Die Rechnung sieht hiernach so aus:

		I II III
	2|95|84|	1 7 2
$I^2 =$	1	
	19...	
$2.I =$	2...	
$2I.II =$	14..	
	55..	
$II^2 =$	49..	
	68.	
$2(I+II) =$	34.	
$2(I+II).III =$	68.	
	:: 4	
$III^2 =$	4	

75) Anmerkung. Wenn man bey einer viertheiligen Wurzel die 3 ersten Theile zusammen den ersten, den 4ten den zweyten Theil nennt, oder allgemein, wenn man bey einer vieltheiligen Wurzel alle Theile bis auf den letzten mit I, diesen letzten aber mit II bezeichnet, so erhellet aus dem Werthe von $(I+II)^2 = I^2 + 2\,I.\,II + II^2$ daß jedes vieltheilige Quadrat aus dem Quadrate aller vorhergehenden Theile bis auf den letzten, dem doppelten Produkte der vorhergehenden Theile in den letzten, und dem Quadrate des letzten Theiles besteht. Man wird also, wenn man die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphs zu Hülfe nimmt, die Wurzel eines jeden vieltheiligen Quadrates finden können, wenn man die Wurzel aus einem zweytheiligen zu ziehen weiß.

Beyspiel:

		I II III IV
		42|35|67|89|6508
$I^2 =$	36	.....
	63	.....
$2I =$	12	.....
$2I.II =$	60	.....
	35	....
$II^2 =$	25	....
	1066	...
$2(I+II) =$	1200	..
$2(I+II)III =)$	000	...
	10677	..
$III^2 =$	00	..
	106778	.
$2(I+II+III) =$	12000	.
$2(I+II+III).IV =$	9600	.
	107789	
$IV.^2 =$	64	
	10725	Rest

76) Aufgabe. Einen Bruch zu quadriren. Man multiplicire den Bruch mit sich selbst, das ist, Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Hieraus folgt, daß das Quadrat eines jeden Bruchs gleich ist, dem Quadrate des Zählers dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Umgekehrt, zieht man aus einem Bruche die Quadratwurzel, wenn man die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner zieht.

$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$ wie gehörig, weil $\frac{16}{4} = 4$ und $\sqrt{4} = 2$ ist. Um die doppelte Wurzelextraction bey einem Bruche zu sparen, verwandle man den Bruch

in einen Decimalbruch, dessen Nenner ein vollkommenes Quadrat ist. Die Reihe dieser Nenner ist folgende:

100 10000 1000000 . . . . . .

10 100 1000 . . . . . Die

zugehörigen Wurzeln. Man findet daher die Wurzeln aus diesen Nennern, wenn man 1 mit halb so viel Nullen nimmt, als der Nenner des Quadrats enthält, und darf blos die Wurzel aus dem Zähler des Decimalbruchs ziehen.

Beyspiel:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{50}{100}} = \sqrt{\tfrac{5000}{10000}} = \tfrac{\sqrt{5000}}{\sqrt{100}}$$

$$\begin{array}{r|l} 50\,00 & 70 \ldots = \sqrt{5000} \\ 49 & \\ \hline 1\,00 & \\ 1\,4 & \\ \hline 0\,00 & \\ \hline 1\,00 & \end{array}$$

daher $\frac{70}{100} \cdots = 0{,}70 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Desselben Verfahrens bedienet man sich, um aus ganzen Zahlen, welche keine vollkommene Quadrate sind, die Wurzel genauer als blos in ganzen Zahlen zu finden. Man verwandelt nämlich jene unvollkommene Quadratzahlen in gleich bedeutende Decimalbrüche, deren Nenner vollkommene Quadrate sind. Beyspiel:

Die Wurzel aus 2 fällt zwischen 1 und 2, sie genauer zu finden setze man $2 = \frac{200}{100} = 2{,}00 = \frac{20000}{10000} = 2{,}0000$ u. s. w. so hat man $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{\frac{20000}{100}}$, allgemein, man hänge an die Zahl so viel paar Nullen, als man Decimalstellen von der Wurzel finden will, und ziehe die Wurzel, wie aus ganzen Zahlen aus:

```
2,|00|00|00|1,414
 1
---
 1 00 . . . .
   2  . . . .
   8  . . . .
  ---
  20 . . . .
  16 . . . .
  ---
   4 00 . .
   2 81 . .
   ----
   1 20 . .
      1
   ----
   1 19 00
     28 21
   -------
   1 12 8
   ------
      6 20
        16
      ----
      6 04  Rest.
```

Die Rechnung geht nicht auf. Hienge man an den Rest noch zwey Decimalstellen, und seßte die Ausziehung für ein fünftheiliges Quadrat fort, so würde man die Wurzel bis in Zehntausendtheilen genau finden, und so immer weiter. Der folgende Satz zeigt, warum die Wurzel nie vollkommen genau gefunden werden kann.

77) Satz. Das Quadrat eines jeden eigentlichen ächten oder unächten Bruches ist wieder ein Bruch. Wenn der eigentliche Bruch zugleich ein ächter ist, so ist er nur ein Theil der Einheit, und von diesem Theil wird durch das Quadriren wieder ein Theil genommen, folglich ist das Quadrat eines ächten Bruches kleiner als die Wurzel, und daher keine ganze Zahl. Ist der eigentliche Bruch ein unächter, so erhält er eine ganze Zahl und einen ächten Bruch. Man bringe Zähler und Renner auf die kleinsten Zahlen, so müssen

dieß Primzahlen unter sich seyn. Denn wären sie es nicht, so hätte der Bruch entweder noch nicht die kleinste Form, oder wäre kein eigentlicher Bruch. Quadrirt man den Bruch unter dieser Gestalt, so sind die Quadrate des Zählers und des Nenners ebenfalls Primzahlen unter sich. Denn sollte das Produkt des Zählers in sich selbst mit dem Produkte des Nenners in sich selbst einen gemeinschaftlichen Factor haben, so müßte auch der Zähler mit dem Nenner denselben gemeinschaftlichen Factor haben, gegen die Voraussetzung. Wenn aber die Quadrate des Zählers und Nenners Primzahlen unter sich sind, so ist auch das Quadrat des unächten Bruches wieder ein unächter Bruch und keine ganze Zahl. Hieraus folgt, daß die Wurzel eines unvollkommenen Quadrats weder durch eine ganze Zahl, noch durch eine ganze Zahl und einen Bruch genau dargestellt werden kann; denn wäre das letzte, so wäre sie ein unächter Bruch, und das Quadrat dieses unächten Bruches wäre eine ganze Zahl, wider das eben Erwiesene. Man nennt solche Wurzeln, welche sich weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen genau angeben lassen, Irrationalgrößen. Sie sind als Zahlen betrachtet unaussprechbar. Die Geometrie lehret die Irrationalgrößen durch Zeichnung genau darstellen. Sie leistet hier mehr als die Arithmetik, weil sie das Gesuchte durch Construction auf einmal giebt, die Arithmetik aber es theilweise findet, und die Irrationalgrößen weder durch die Einheit, noch durch Theile der Einheit sich völlig genau messen lassen. Das Verfahren (76) giebt die Irrationalwurzeln durch Näherung, und da man sich ihrem wahren Werthe so weit man will nähern kann, so ist dieß für die Ausübung völlig befriedigend.

78) Anmerkung. Zur Erleichterung der Rechnung hat man Quadrattafeln berechnet, welche gewöhnlich (wie die Wolfischen) die Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 – 1000 enthalten. Man

kann sich derselben noch mit Vortheil auch für größere Zahlen bedienen, welche nicht unmittelbar in den Tafeln enthalten sind. Z. B. man sucht das Quadrat von 36744, man schneide so viele Ziffern von der Zahl ab, bis man die übrig bleibenden in den Tafeln findet, hier

I. II.

367|44 oder $36744 = 36700 + 44$, heißt man die Zahl linker Hand den ersten, rechter Hand den 2ten Theil, so ist nach (73) $36744^2 = 36700^2 + 2.36700.44 + 44^2$. Die beiden Quadrate findet man aus den Tafeln, und das doppelte Produkt durch die Multiplication $36700^2 = 367^2.10000 =$

$= 1346890000$

$3229600 = 2.36700.44$

$2936 = 44^2$

$1350121536 = 36744^2$.

Die Wurzel aus einer Zahl zu finden, welche größer ist als die in den Tafeln enthaltenen Quadrate, theile man die Zahl in Classen, lasse so viele von den hintern Classen weg, bis man die übrigen in der Tafel findet. Das Quadrat der Tafeln, welches den übriggebliebenen Classen am nächsten kommt, giebt die zu diesen Classen gehörige Wurzel. Diese betrachtet man als die ersten Theile der gesuchten Wurzel, und findet die übrigen Theile aus den noch übrigen Classen, und dem Reste der ersten Classen auf die gewöhnliche Weise.

Beyspiel, aus 36744896 die Wurzel zu ziehen.

36|74|48|96|6061

aus den Tafeln $606^2 = 36\ 72\ 36$

2 12 96

1 20 2

92 76

1

92 75

Der Gebrauch der Quadratrechnung wird sich vorzüglich in der Geometrie zeigen. Bey dem mündlichen Unterricht können den Anfängern folgende Beyspiele nebst der nöthigen Erläuterung zur Uebung im Rechnen vorgelegt werden. Wie groß ist die Seite des Vierecks, welches 10000 Mann einnehmen, die ein volles Bataillon quarré formiren, $1\frac{1}{2}$ Fuß auf den Mann gerechnet? Antw. $\sqrt{}$ 10000. $1\frac{1}{2}$ Fuß. Wie tief fällt ein schwerer Körper in einer Minute lothrecht hinab, wenn er in einer Secunde 1 Ruthe fällt, und die Fallhöhen sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten? Antw. 60^2 Ruthen. Wie viel Secunden braucht ein schwerer Körper, durch eine deutsche Meile (= 1600 Ruthen) lothrecht herab zu fallen? Antw. $\sqrt{}$ 1600 Secunden. Wie breit und wie lang ist das regulaire Viereck, auf welchem 2500 Bäume stehen, wenn jeder Baum von dem andern 1 Ruthe entfernt ist?

Wie lange braucht ein Körper auf dem Monde durch 256 Ruthen zu fallen, wenn er dort in einer Minute so weit als auf der Erde in einer Secunde fällt? u. dgl. m.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel.

79) Satz. Der Cubus von jeder ganzen Zahl hat nicht mehr denn dreymal so viel, und nicht weniger denn dreymal so viel weniger zwey Ziffern als die Wurzel.

Denn man cubire die kleinsten Zahlen von der Ordnung der Zehner, der Hunderte, der Tausende u. s. w., so erhält man

den Cubus von 10 = 1000
— — — 100 = 1000000
— — — 1000 = 1000000000 und so weiter.

Ein

Ein jeder Cubus in dieser Reihe hat dreymal so viel Nullen als die Wurzel, oder der Cubus der kleinste Zahl von zwey Ziffern hat 4, von 3 Ziffern 7, von 4 Ziffern 10 Ziffern. Also fallen die Cubus aller Zehner zwischen 4 und 6, d. i. zwischen 3. 2 — 2 und 3. 2 Ziffern, die Cubus aller Hunderte zwischen 7 und 9, d. i. zwischen 3.3 — 2 und 3. 3 Ziffern, und so geht das Gesetz fort.

Theilet man daher eine Cubikzahl von der Rechten an, in Classen von 3 zu 3 Ziffern, so erhält man so viel Classen, als die Wurzel Ziffern hat. Man nennt daher den Cubus nach der Zahl der Classen, die Wurzel nach der Zahl der Ziffern zweytheilig, dreytheilig u. s. w.

80) Aufgabe. Die Theile zu finden, welche in einem zweytheiligen Cubus enthalten sind. Man erhebe die Wurzel nach (73) zum Quadrat, und multiplicire alle Theile des Quadrates noch einmal mit den Theilen der Wurzel, so erhält man die Theile des Cubus. Beyspiel:

	I.	II.	
34	$= 30$	$+ 4$	
34^2	$= 30^2$	$+ 2.30.4$	$+ 4^2$
34	$=$	30	$+ 4$
34^3	$= 30^3.4$	$+ 2.30.4^2$	$+ 4^3$
	$30^3 + 2.30^2.4$	$+ 30.4^2$	
	$30^3 + 3.30^2.4$	$+ 3.30.4^2$	$+ 4^3$

in den (73) gebrauchten allgemeinen Zeichen

$$(I + II)^3 = I^3 + 3I^2.II + 3I.II^2 + II^3$$

Das ist, der Cubus einer zweytheiligen Wurzel besteht aus dem Cubus des ersten Theils, dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils multipliciret in den zweyten, dem dreyfachen ersten Theil multipliciret in das Quadrat des zweyten Theiles, und endlich, dem Cubus des zweyten Theiles.

81) Aufgabe. Die Wurzel aus einem zweytheiligen Cubus zu ziehen.

Man nehme die Theile, welche in dem Cubus enthalten sind, nach der Reihe daraus weg. Es ist aber der Cubus des Zehners bloß in der ersten Classe enthalten, weil er anzusehen ist als ein Produkt aus dem Cubus seiner Ziffer in den Cubus von 10. In dem Exempel des vorstehenden Paragraphs $30 = 3.10$ und $30^3 = 3^3.10^3 = 27.1000 = 27000$. Das Produkt des dreyfachen Quadrates des Zehners in den Einer fängt sich unter der Stelle der Hunderte (unter der ersten Stelle der zweyten Classe) an, weil das Quadrat eines jeden Zehners Hunderte enthält (72) und durch die Multiplication mit einem Einer immer wieder Hunderte giebt, das dreyfache Produkt des Zehners in das Quadrat des Einers fängt sich als eine Menge von Zehnern unter der zweyten Stelle der letzten Classe, und der Cubus des Einers endlich fängt sich unter der letzten Stelle der letzten Classe an, und ist vermöge (79) ganz in der letzten Classe enthalten.

Hieraus fließen folgende Regeln für die Ausziehung der Cubikwurzel aus einem zweytheiligen Cubus: Man theile die Cubikzahl in Classen von 3 Ziffern von der rechten Hand an, sehe die erste Classe linker Hand als den Cubus des ersten Theiles an, suche, welche Cubikzahl der ersten Classe am nächsten kommt, die zugehörige Wurzel ist der erste Theil der Wurzel. Die Cubikzahl wird von der ersten Classe abgezogen und zu dem Reste die erste Stelle der zweyten Classe geschrieben. Diesen Rest betrachtet man als das Produkt des dreyfachen Quadrates des ersten Theils in den zweyten Theil, und findet diesen zweyten Theil, indem man mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils in den obigen Rest dividiret. Man multiplicire den gefundenen zweyten Theil mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theiles, und ziehe, was heraus

kommt, von dem obigen Reste ab. Zu dem was übrig bleibt, schreibe man die zweyte Stelle der zweyten Classe, nehme davon das dreyfache Produkt des Zehners in das Quadrat des Einers, und endlich, nachdem man die letzte Stelle der zweyten Classe herunter gethan hat, auch den Cubus des Einers weg. Beyspiel:

	I. II.		I. II.
	39 | 304 | 34		483 | 692 | 78
$I^3 =$	27	$I^3 =$	343
	123		1406
$3\,I^2 =$	27		147
$3\,I^2.\,II =$	108	$3\,I^2.\,II =$	1176
	150		2309
$3\,I.\,II^2 =$	144	$3\,I.\,II^2 =$	1344
	64		9652
$II^3 =$	64	$II^3 =$	512
			9140

82) Anmerkung. Wenn man den zweyten Theil bey der Division des dreyfachen Quadrates des ersten Theiles in den Rest aus der ersten Classe und die erste Ziffer der zweyten Classe zu groß annimmt, so lassen sich die folgenden Theile des zweytheiligen Cubus nicht mehr abziehen, man muß alsdann den gefundenen zweyten Theil so lange vermindern, bis dieser Abzug statt findet. In dem andern Beyspiel des vorhergehenden Paragraphs würde die Division den zweyten Theil = 9 geben, welches zu viel ist. Der Rest zeigt an, daß die Zahl kein vollkommener Cubus ist.

83) Aufgabe. Die Theile zu finden, aus welchen ein dreytheiliger Cubus zusammengesetzt ist.

Man sehe die beyden ersten Theile zusammengenommen als einen, und den dritten Theil als den an-

dern Theil an, und verfahre nach (80), so erhält man folgendes Beyspiel:

$$\begin{aligned}
286^3 &= (\overset{\text{I}}{280} + \overset{\text{II}}{6})^3 \\
(280+6)^2 &= 280^2 + 2.280.6 + 6^2 \\
\underline{280+6} \qquad & \qquad \underline{280+6} \\
(280+6)^3 &= 280^3 + 2.280^2.6 + 280.6^2 \\
&\qquad + 280^2.6 + 2.280.6^2 + 6^3 \\
&= 280^3 + 3.280^2.6 + 3.280.6^2 + 6^3 \\
&= \text{I}^3 + 3\,\text{I}^2.\,\text{II} + 3\,\text{I.II}^2 + \text{II}^3 \\
280^3 &= (28.10)^3 = 28^3.1000.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, daß ein dreytheiliger Cubus zu seinem ersten Theil den Cubus der beyden ersten Theile, das ist alle Theile, welche in einem zweytheiligen Cubus vorkommen, enthält, und noch überdieß das dreyfache Quadrat der beyden ersten Theile multiplicirt in den dritten Theil, das dreyfache Product der beyden ersten Theile in das Quadrat des dritten Theils, und endlich den Cubus des dritten Theiles.

83) Zusatz. Wenn man die drey ersten Theile einer viertheiligen Wurzel zusammengenommen den ersten Theil (I) den 4ten Theil den andern (II) nennt, so findet man durch dasselbe Verfahren, wie im vorhergehenden Paragraph, daß der Cubus einer viertheiligen Wurzel aus allen Theilen eines dreytheiligen Cubus, und überdieß aus den dreyfachen Produkten des Quadrates der drey vorhergehenden Theile in dem neuen Theile und der drey vorhergehenden Theile in das Quadrat des neuen Theiles nebst dem Cubus des neuen Theiles bestehe. Ueberhaupt findet dieses Gesetz bey allen vieltheiligen Würfeln statt, wenn man alle Theile, ohne den letzten, zusammengenommen den ersten, und den letzten Theil den zweyten nennt.

84) Aufgabe. Die Wurzel aus einem dreytheiligen Cubus zu ziehen.

Man theile den Cubus von der rechten zur linken Hand in Classen von 3 Ziffern, aus den beyden ersten Classen ziehe man die Wurzel nach §. 81, so hat man die beyden ersten Theile der Wurzel. Um den dritten Theil zu finden, schreibe man die dritte Classe zu dem Reste aus den beyden ersten Classen, und verfahre eben so, wie man verfahren ist, um den zweyten Theil der Wurzel aus dem ersten zu finden. Hierauf nehme man alle noch übrigen Theile des dreytheiligen Cubus nach der Reihe hinweg, so ist geschehen, was man verlangte. Beyspiel:

I II

23|393|656|(28) 6

8

15 393

12

96

5 793

384

1 953

512

1 441 656

$3\,I^2 =$ 2352

$3\,I^2.II =$ 14112

3045

$3\,I.II^2 =$ 3024

216

$II^3 =$ 216

Der Grund dieses Verfahrens erhellet aus (82).

85) Satz. Aus (83) lassen sich leicht die Regeln zur Ausziehung der Wurzel aus einem vier- und überhaupt vieltheiligen Cubus herleiten. Die Rechnung wird immer weitläuftiger. Zur Erleichterung derselben hat man Cubiktafeln berechnet, worin die Würfel aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 enthalten sind. Man kann diese Tafeln noch mit Vortheil bey Zahlen gebrauchen, welche ausserhalb ihren Gränzen liegen, indem man sich dabey eines ähnlichen Verfahrens, wie 78. §. bey den Quadrattafeln ist gewiesen worden, bedient.

Beyspiel zur Ausziehung der Wurzel aus einem viertheiligen Cubus mit Hülfe der Tafeln:

					I	II
	732	814	639	826	(901)	5
Cubus aus den Tafeln	731	432	701			
				1 381 938 826		
$3\,I^2 =$				243 540 3		
$3\,I^2.\,II =$				1 217 701 5		
				164 237 32		
$3\,I.\,II^2 =$				675 75		
				163 561 576		
$II^3 =$				125		
				163 561 451 Rest.		

86) Aufgabe. Einen Bruch zu cubiren. Man multiplicire den Bruch zweymal mit sich selbst, also, nach der Regel für die Multiplication der Brüche Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Hieraus fließet, daß der Cubus eines Bruches gleich ist dem Cubus des Zählers dividiret durch den Cubus des Nenners. Will man nun umgekehrt aus einem Bruche die Cubikwurzel ziehen, so zieht man die Cubikwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner des Bruches.

Beyspiel:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \tfrac{1}{3}$$

87) Zusatz. Wenn man die gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche, deren Nenner vollkommene Cubikzahlen sind, verwandelt, so darf man, um die Cubikwurzel des Bruchs zu finden, nur die Cubikwurzel aus dem Zähler ziehen, indem sie sich für den Nenner leicht aus nachstehender Tafel ergiebt,

Wurzeln	10	100	1000 . . . . .
Würfel	1000	1000000	1000000000 . . . .

Man übersieht, daß der Cubus allgemein dreymal so viel Nullen hat als die Wurzel, oder die Wurzel so viel Ziffern als der Cubus Classen hat.

Beyspiel: $\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}$ zu finden,

$$\tfrac{1}{8} = 0,125 = \tfrac{125}{1000}\sqrt[3]{0,125} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \tfrac{5}{10} = 0,5 = \tfrac{1}{2}$$ wie oben.

Dieses Verfahren dienet auch, die Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl welche kein vollkommener Cubus ist, genauer als bloß in ganzen Zahlen zu finden. Man verwandele die ganze Zahl in einen Decimalbruch, dessen Nenner ein vollkommener Cubus ist, das ist, man hänge so vielmal drey Nullen an die Zahl, als man Decimalstellen der Wurzel berechnen will.

Beyspiel:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2,000} = \sqrt[3]{2,000000} \text{ u. s. w.}$$

2, | 000 | 000 | 1, 25 . . . .

1

1 000

3

6

40

12

280

8

272 000

432

2160

5600

900

47 000

125

46 875

Die Rechnung kann man so weit fortsetzen, als man will, sie geht aber nie auf, weil man völlig so wie §. 77. erweißt, daß der Cubus eines jeden Bruches wieder ein Bruch ist, folglich die Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl nie genau durch einen Bruch dargestellt werden kann. Genauer findet man

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599205 \ldots$$

Die Cubikwurzel ist also sehr nahe $= 1,26$.

88) Anmerkung. Der Gebrauch der Cubikrechnung wird erst in der Folge gewiesen werden können. Vorläufig dienet zur Uebung im Rechnen: wenn die Sonne 1 385470 mal größer ist als die Erde, wie viel

mal ist der Durchmesser der Sonne größer als der Durchmesser der Erde?

Antwort: $\sqrt[3]{1385470}$.

Wenn sich die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten wie die Würfel ihrer Entfernungen von der Sonne verhalten, und Uranus 81 Jahre braucht, um die Sonne zu gehen, wie vielmal ist dieser Planet weiter von der Sonne als die Erde entfernt? Antwort: $\sqrt[3]{81^2}$.

V. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf die Regula de tri, Interessen-, Gesellschafts- und Alligationsrechnung.

89) Erklärung. Die Art, wie eine Größe aus der andern entsteht, nennt man ihr Verhältniß gegen einander. Es giebt zwey Arten der Verhältnisse, weil es zweyerley Wege giebt, Größen mit einander zu vergleichen. Man kann nämlich untersuchen,

1) um wie viel übertrift eine Größe die andere?

2) wie viel mal ist eine Größe in der andern enthalten?

Die erste Art der Vergleichung geschiehet durch die Addition oder Subtraction, und heißt das arithmethische Verhältniß; die andere Art der Vergleichung geschieht durch die Multiplication oder Division, und heißt das geometrische Verhältniß. Aus dem Gesagten erhellet, daß in dem Begriff eines Verhältnisses drey Größen vorkommen, zwey, welche mit einander verglichen werden, und die dritte, welche das Resultat der Vergleichung angiebt. Die beyden ersten heißen die Glieder des Verhältnisses, die dritte bey dem arithmetischen Verhältniß der Unterschied, bey dem geometrischen Verhältniß der Exponent.

Der Gebrauch der Quadratrechnung wird sich vorzüglich in der Geometrie zeigen. Bey dem mündlichen Unterricht können den Anfängern folgende Beyspiele nebst der nöthigen Erläuterung zur Uebung im Rechnen vorgelegt werden. Wie groß ist die Seite des Vierecks, welches 10000 Mann einnehmen, die ein volles Bataillon quarré formiren, $1\frac{1}{2}$ Fuß auf den Mann gerechnet? Antw. $\sqrt{}$ 10000. $1\frac{1}{2}$ Fuß. Wie tief fällt ein schwerer Körper in einer Minute lothrecht hinab, wenn er in einer Secunde 1 Ruthe fällt, und die Fallhöhen sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten? Antw. 60^2 Ruthen. Wie viel Secunden braucht ein schwerer Körper, durch eine deutsche Meile (= 1600 Ruthen) lothrecht herab zu fallen? Antw. $\sqrt{}$ 1600 Secunden. Wie breit und wie lang ist das regulaire Viereck, auf welchem 2500 Bäume stehen, wenn jeder Baum von dem andern 1 Ruthe entfernt ist?

Wie lange braucht ein Körper auf dem Monde durch 256 Ruthen zu fallen, wenn er dort in einer Minute so weit als auf der Erde in einer Secunde fällt? u. dgl. m.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel.

79) Satz. Der Cubus von jeder ganzen Zahl hat nicht mehr denn dreymal so viel, und nicht weniger denn dreymal so viel weniger zwey Ziffern als die Wurzel.

Denn man cubire die kleinsten Zahlen von der Ordnung der Zehner, der Hunderte, der Tausende u. s. w., so erhält man

den Cubus von 10 = 1000
— — — 100 = 1000000
— — — 1000 = 1000000000 und so weiter.

Ein

Ein jeder Cubus in dieser Reihe hat dreymal so viel Nullen als die Wurzel, oder der Cubus der kleinsten Zahl von zwey Ziffern hat 4, von 3 Ziffern 7, von 4 Ziffern 10 Ziffern. Also fallen die Cubus aller Zehner zwischen 4 und 6, d. i. zwischen 3. 2 — 2 und 3. 2 Ziffern, die Cubus aller Hunderte zwischen 7 und 9, d. i. zwischen 3.3 — 2 und 3. 3 Ziffern, und so geht das Gesetz fort.

Theilet man daher eine Cubikzahl von der Rechten an, in Classen von 3 zu 3 Ziffern, so erhält man so viel Classen, als die Wurzel Ziffern hat. Man nennt daher den Cubus nach der Zahl der Classen, die Wurzel nach der Zahl der Ziffern zweytheilig, dreytheilig u. s. w.

80) Aufgabe. Die Theile zu finden, welche in einem zweytheiligen Cubus enthalten sind. Man erhebe die Wurzel nach (73) zum Quadrat, und multiplicire alle Theile des Quadrates noch einmal mit den Theilen der Wurzel, so erhält man die Theile des Cubus. Beyspiel:

		I.		II.		
34	$=$	30	$+$	4		
34^2	$=$	30^2	$+$	$2.30.4$	$+$	4^2
34	$=$			30	$+$	4
34^3	$=$	$30^2.4$	$+$	$2.30.4^2$	$+$	4^3
		$30^3+2.30^2.4$	$+$	30.4^2		
		$30^3+3.30^2.4$	$+$	$3.30.4^2$	$+$	4^3

in den (73) gebrauchten allgemeinen Zeichen

$$(I+II)^3 = I^3 + 3I^2.II + 3I.II^2 + II^3$$

Das ist, der Cubus einer zweytheiligen Wurzel bestehe aus dem Cubus des ersten Theils, dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils multiplicirt in den zweyten, dem dreyfachen ersten Theil multiplicirt in das Quadrat des zweyten Theiles, und endlich, dem Cubus des zweyten Theiles.

81) Aufgabe. Die Wurzel aus einem zweytheiligen Cubus zu ziehen.

Man nehme die Theile, welche in dem Cubus enthalten sind, nach der Reihe daraus weg. Es ist aber der Cubus des Zehners bloß in der ersten Classe enthalten, weil er anzusehen ist als ein Produkt aus dem Cubus seiner Ziffer in den Cubus von 10. In dem Exempel des vorstehenden Paragraphs $30 = 3.10$ und $30^3 = 3^3 . 10^3 = 27.1000 = 27000$. Das Produkt des dreyfachen Quadrates des Zehners in den Einer fängt sich unter der Stelle der Hunderte (unter der ersten Stelle der zweyten Classe) an, weil das Quadrat eines jeden Zehners Hunderte enthält (72) und durch die Multiplication mit einem Einer immer wieder Hunderte giebt, das dreyfache Produkt des Zehners in das Quadrat des Einers fängt sich als eine Menge von Zehnern unter der zweyten Stelle der letzten Classe, und der Cubus des Einers endlich fängt sich unter der letzten Stelle der letzten Classe an, und ist vermöge (79) ganz in der letzten Classe enthalten.

Hieraus fließen folgende Regeln für die Ausziehung der Cubikwurzel aus einem zweytheiligen Cubus: Man theile die Cubikzahl in Classen von 3 Ziffern von der rechten Hand an, sehe die erste Classe linker Hand als den Cubus des ersten Theiles an, suche, welche Cubikzahl der ersten Classe am nächsten kommt, die zugehörige Wurzel ist der erste Theil der Wurzel. Die Cubikzahl wird von der ersten Classe abgezogen und zu dem Reste die erste Stelle der zweyten Classe geschrieben. Diesen Rest betrachtet man als das Produkt des dreyfachen Quadrates des ersten Theils in den zweyten Theil, und findet diesen zweyten Theil, indem man mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils in den obigen Rest dividiret. Man multiplicire den gefundenen zweyten Theil mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theiles, und ziehe, was heraus

kommt, von dem obigen Reste ab. Zu dem was übrig bleibt, schreibe man die zweyte Stelle der zweyten Classe, nehme davon das dreyfache Produkt des Zehners in das Quadrat des Einers, und endlich, nachdem man die letzte Stelle der zweyten Classe herunter gethan hat, auch den Cubus des Einers weg. Beyspiel:

I. II.

$$\begin{array}{rl} & 39\,|\,304\,|\,34 \\ I^3 = & 27 \\ \hline & 123 \\ 3\,I^2 = & 27 \\ 3\,I^2.\,II = & 108 \\ \hline & 150 \\ 3\,I.\,II^2 = & 144 \\ \hline & 64 \\ II^3 = & 64 \\ \hline & \end{array}$$

I. II.

$$\begin{array}{rl} & 483\,|\,692\,|\,78 \\ I^3 = & 343 \\ \hline & 1406 \\ & 147 \\ 3\,I^2.\,II = & 1176 \\ \hline & 2309 \\ 3\,I.\,II^2 = & 1344 \\ \hline & 9652 \\ II^3 = & 512 \\ \hline & 9140 \end{array}$$

82) **Anmerkung.** Wenn man den zweyten Theil bey der Division des dreyfachen Quadrates des ersten Theiles in den Rest aus der ersten Classe und die erste Ziffer der zweyten Classe zu groß annimmt, so lassen sich die folgenden Theile des zweytheiligen Cubus nicht mehr abziehen, man muß alsdann den gefundenen zweyten Theil so lange vermindern, bis dieser Abzug statt findet. In dem andern Beyspiel des vorhergehenden Paragraphs würde die Division den zweyten Theil = 9 geben, welches zu viel ist. Der Rest zeigt an, daß die Zahl kein vollkommener Cubus ist.

83) **Aufgabe.** Die Theile zu finden, aus welchen ein dreytheiliger Cubus zusammengesetzt ist.

Man sehe die beyden ersten Theile zusammengenommen als einen, und den dritten Theil als den an-

dern Theil an, und verfahre nach (80), so erhält man folgendes Beyspiel:

$$\begin{aligned}
286^3 &= (280 + 6)^3 \qquad \overset{\text{I}}{} \quad \overset{\text{II}}{} \\
(280+6)^2 &= 280^2 + 2.280.6 + 6^2 \\
\frac{280+6}{(280+6)^3} &= \frac{280 + 6}{280^3 + 2.280^2.6 + 280.6^2} \\
&\qquad + 280^2.6 + 2.280.6^2 + 6^3 \\
&= 280^3 + 3.280^2.6 + 3.280.6^2 + 6^3 \\
&= \text{I}^3 + 3\,\text{I}^2.\,\text{II} + 3\text{I}.\text{II}^2 + \text{II}^3 \\
280^3 &= (28.10)^3 = 28^3.1000.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, daß ein dreytheiliger Cubus zu seinem ersten Theil den Cubus der beyden ersten Theile, das ist alle Theile, welche in einem zweytheiligen Cubus vorkommen, enthält, und noch überdieß das dreyfache Quadrat der beyden ersten Theile multiplicirt in den dritten Theil, das dreyfache Product der beyden ersten Theile in das Quadrat des dritten Theils, und endlich den Cubus des dritten Theiles.

83) Zusatz. Wenn man die drey ersten Theile einer viertheiligen Wurzel zusammengenommen den ersten Theil (I) den 4ten Theil den andern (II) nennt, so findet man durch dasselbe Verfahren, wie im vorhergehenden Paragraph, daß der Cubus einer viertheiligen Wurzel aus allen Theilen eines dreytheiligen Cubus, und überdieß aus den dreyfachen Produkten des Quadrates der drey vorhergehenden Theile in dem neuen Theile und der drey vorhergehenden Theile in das Quadrat des neuen Theiles nebst dem Cubus des neuen Theiles bestehe. Ueberhaupt findet dieses Gesetz bey allen vieltheiligen Würfeln statt, wenn man alle Theile, ohne den letzten, zusammengenommen den ersten, und den letzten Theil den zweyten nennt.

84) Aufgabe. Die Wurzel aus einem dreytheiligen Cubus zu ziehen.

Man theile den Cubus von der rechten zur linken Hand in Classen von 3 Ziffern, aus den beyden ersten Classen ziehe man die Wurzel nach §. 81, so hat man die beyden ersten Theile der Wurzel. Um den dritten Theil zu finden, schreibe man die dritte Classe zu dem Reste aus den beyden ersten Classen, und verfahre eben so, wie man verfahren ist, um den zweyten Theil der Wurzel aus dem ersten zu finden. Hierauf nehme man alle noch übrigen Theile des dreytheiligen Cubus nach der Reihe hinweg, so ist geschehen, was man verlangte. Beyspiel:

$$
\begin{array}{rl}
 & \overset{\text{I}\quad\text{II}}{} \\
23|393|656 & |(28)\,6 \\
8 & \\
\hline
15\,393 & \\
12 & \\
96 & \\
\hline
5\,793 & \\
384 & \\
\hline
1\,953 & \\
512 & \\
\hline
1\,441\,656 & \\
3\,\text{I}^2 = 2352 & \\
3\,\text{I}^2.\,\text{II} = 14112 & \\
\hline
3045 & \\
3\,\text{I}.\,\text{II}^2 = 3024 & \\
\hline
216 & \\
\text{II}^3 = 216 & \\
\hline
\end{array}
$$

Der Grund dieses Verfahrens erhellet aus (82).

85) Satz. Aus (83) lassen sich leicht die Regeln zur Ausziehung der Wurzel aus einem vier- und überhaupt vieltheiligen Cubus herleiten. Die Rechnung wird immer weitläuftiger. Zur Erleichterung derselben hat man Cubiktafeln berechnet, worin die Würfel aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 enthalten sind. Man kann diese Tafeln noch mit Vortheil bey Zahlen gebrauchen, welche ausserhalb ihren Gränzen liegen, indem man sich dabey eines ähnlichen Verfahrens, wie 78. §. bey den Quadrattafeln ist gewiesen worden, bedient.

Beyspiel zur Ausziehung der Wurzel aus einem viertheiligen Cubus mit Hülfe der Tafeln:

		I	II
	732 | 814 | 639 | 826 | (901)	5	
Cubus aus den Tafeln	731 432 701		
	1 381 938 826		
$3\,I^2 =$	243 540 3		
$3\,I^2.\,II =$	1 217 701 5		
	164 237 32		
$3\,I.\,II^2 =$	675 75		
	163 561 576		
$II^3 =$	125		
	163 561 451 Rest.		

86) Aufgabe. Einen Bruch zu cubiren. Man multiplicire den Bruch zweymal mit sich selbst, also, nach der Regel für die Multiplication der Brüche Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Hieraus fließet, daß der Cubus eines Bruches gleich ist dem Cubus des Zählers dividiret durch den Cubus des Nenners. Will man nun umgekehrt aus einem Bruche die Cubikwurzel ziehen, so zieht man die Cubikwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner des Bruches.

Beyspiel:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \tfrac{1}{3}$$

87) Zusatz. Wenn man die gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche, deren Nenner vollkommene Cubikzahlen sind, verwandelt, so darf man, um die Cubikwurzel des Bruchs zu finden, nur die Cubikwurzel aus dem Zähler ziehen, indem sie sich für den Nenner leicht aus nachstehender Tafel ergiebt,

Wurzeln	10	100	1000 . . . . .
Würfel	1000	1000000	1000000000 . . . .

Man übersieht, daß der Cubus allgemein dreymal so viel Nullen hat als die Wurzel, oder die Wurzel so viel Ziffern als der Cubus Classen hat.

Beyspiel: $\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}$ zu finden,

$$\tfrac{1}{8} = 0,125 = \tfrac{125}{1000}\sqrt[3]{0,125} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \tfrac{5}{10} = 0,5 =$$

$\frac{1}{2}$ wie oben.

Dieses Verfahren dienet auch, die Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl welche kein vollkommener Cubus ist, genauer als bloß in ganzen Zahlen zu finden. Man verwandele die ganze Zahl in einen Decimalbruch, dessen Nenner ein vollkommener Cubus ist, das ist, man hänge so vielmal drey Nullen an die Zahl, als man Decimalstellen der Wurzel berechnen will.

Beyspiel:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2,000} = \sqrt[3]{2,000000} \text{ u. s. w.}$$

2, | 000 | 000 | 1, 25 . . . .

1

1 000

3

6

40

12

280

8

272 000

432

2160

5600

900

47 000

125

46 875

Die Rechnung kann man so weit fortsetzen, als man will, sie geht aber nie auf, weil man völlig so wie §. 77. erweißt, daß der Cubus eines jeden Bruches wieder ein Bruch ist, folglich die Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl nie genau durch einen Bruch dargestellt werden kann. Genauer findet man

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599205 \ldots$$

Die Cubikwurzel ist also sehr nahe $= 1,26$.

88) Anmerkung. Der Gebrauch der Cubikrechnung wird erst in der Folge gewiesen werden können. Vorläufig dienet zur Uebung im Rechnen: wenn die Sonne 1385470 mal größer ist als die Erde, wie viel

mal ist der Durchmesser der Sonne größer als der Durchmesser der Erde?

Antwort: $\sqrt[3]{1385470}$.

Wenn sich die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten wie die Würfel ihrer Entfernungen von der Sonne verhalten, und Uranus 81 Jahre braucht, um die Sonne zu gehen, wie vielmal ist dieser Planet weiter von der Sonne als die Erde entfernt? Antwort: $\sqrt[3]{81^2}$.

V. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf die Regula de tri, Interessen-, Gesellschafts- und Alligationsrechnung.

89) Erklärung. Die Art, wie eine Größe aus der andern entsteht, nennt man ihr Verhältniß gegen einander. Es giebt zwey Arten der Verhältnisse, weil es zweyerley Wege giebt, Größen mit einander zu vergleichen. Man kann nämlich untersuchen,

1) um wie viel übertrift eine Größe die andere?

2) wie viel mal ist eine Größe in der andern enthalten?

Die erste Art der Vergleichung geschiehet durch die Addition oder Subtraction, und heißt das arithmethische Verhältniß; die andere Art der Vergleichung geschieht durch die Multiplication oder Division, und heißt das geometrische Verhältniß. Aus dem Gesagten erhellet, daß in dem Begriff eines Verhältnisses drey Größen vorkommen, zwey, welche mit einander verglichen werden, und die dritte, welche das Resultat der Vergleichung angiebt. Die beyden ersten heißen die Glieder des Verhältnisses, die dritte bey dem arithmetischen Verhältniß der Unterschied, bey dem geometrischen Verhältniß der Exponent.

Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist ein Strich (—), des geometrischen Verhältnisses zwey Puncte (:), welches man zwischen die Glieder des Verhältnisses setzt.

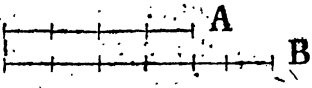
Beyspiel:

$$8 - 12 = 4 \quad \text{Unterschied,}$$
$$9 : 27 = 3 \quad \text{Exponent.}$$

8, 9 heißen die vorhergehenden, 12, 27 die nachfolgenden Glieder des Verhältnisses.

90) Anmerkung. Alles, was hier und in der Folge von Verhältnissen gelehrt wird, schränkt sich nicht blos auf Zahlen ein, sondern gilt von den Größen überhaupt. Die stetigen ausgedehnten Größen lassen sich durch Zahlen ausdrücken, wenn man sie sich in gleiche Theile getheilt vorstellet, und einen dieser Theile mit 1 bezeichnet.

So findet z. B.



zwischen den beyden Linien A und B das arithmetische Verhältniß $4 - 6 = 2$, oder das geometrische Verhältniß $4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ statt. In dem letzten Verhältniß ist der Exponent ein eigentlicher Bruch; dieser kann selbst kleiner als die Einheit werden, wenn das nachfolgende Glied kleiner als das vorhergehende ist. Er kann eine irrationale Größe werden, wenn eins der beyden Glieder eine ist. Solche Verhältnisse, wie $2 : \sqrt{3}$ heißen irrationale Verhältnisse. Sie können durch Zahlen nie vollkommen genau dargestellt werden. In der Geometrie kommen sie häufig vor, und werden dort einer besondern Betrachtung gewürdigt werden. Die Alten kannten nur das geometrische Verhältniß, man nennt es daher auch schlechtweg Verhältniß.

Vergleichung der Verhältnisse.

Arithmetische Proportion.

91) Satz. Zwey arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Unterschiede gleich sind. Denn alsdann entstehen in beyden Verhältnissen die nachfolgenden Glieder auf gleiche Art aus den vorhergehenden Gliedern. z. B.

$$10 \overset{4}{\smile} 6 = 8 \overset{4}{\smile} 4$$

$$2 \overset{3}{\smile} 5 = 7 \overset{3}{\smile} 10$$

Die Verbindung zweyer gleichen arithmetischen Verhältnisse heißt eine arithmetische Proportion. 10 und 4 in dem ersten Beyspiel sind die äussern, 6 und 8 die mittlern Glieder der Proportion, oder 2 und 10 die äussern, 5 und 7 die mittlern in dem andern Beyspiel. In dieser Proportion entstehen die nachfolgenden Glieder in beyden Verhältnissen durch die Addition des Unterschieds zu den vorhergehenden Gliedern, in der Proportion des ersten Beyspiels durch die Subtraction des Unterschieds. Dieß hängt blos von der Stellung der Glieder ab, welche willkührlich ist, nur muß sie in beyden Verhältnissen der Proportion dieselbe seyn.

Wenn die beyden mittlern Glieder gleich sind, so heißt die Proportion eine stetige Proportion. Beyspiel:

$$3 - 8 = 8 - 13$$

92) Satz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern gleich der Summe der mittlern Glieder. Man drücke in beyden Verhältnissen die nachfolgenden Glieder durch die vorhergehenden und den Unterschied (der für beyde Verhältnisse derselbe ist) aus, so erhellet, daß sowohl die Summe der äussern als der mittlern Glieder einer arithmetischen Proportion

aus den vorhergehenden Gliedern beyder Verhältnisse und dem Unterschiede besteht. z. B.

$$\begin{array}{rcl} \overset{4}{5 \quad\quad 9} & = & \overset{4}{10 \quad\quad 14} \\ 5 - (5+4) & = & 10 - (10+4) \\ 5 + (10+4) & & \text{Summe der äussern,} \\ (5+4) + 10 & & \text{Summe der mittlern Glieder.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{oder } 12 \quad\quad 8 & = & 10 \quad\quad 6 \\ 12 - (12-4) & = & 10 - (10-4) \\ 12 + (10-4) & & \text{Summe der äussern,} \\ (12-4) + 10 & & \text{Summe der mittlern Glieder.} \end{array}$$

93) Zusatz. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder gleich dem doppelten mittlern Gliede. Hierauf gründet sich die Auflösung des im gemeinen Leben häufig vorkommenden Falls: Zwischen zwey gegebenen Zahlen das arithmetische Mittel zu finden. Man addirt die gegebenen Zahlen zusammen und halbirt sie. z. B.

$$\text{arithmetisches Mittel} = \frac{8,\ 20}{\frac{8+20}{2}} = 14$$

Auf eine ähnliche Weise findet man zwischen mehreren Zahlen eine mittlere, wenn man sie alle zusammen addirt, und die Summe durch ihre Anzahl dividirt. Dieses Verfahrens bedient man sich überall, wo man aus mehreren unter einander abweichenden Werthen einer Größe einen mittlern Werth finden will. z. B.

Den mittlern jährlichen Ertrag eines Guts aus mehrere Jahre hindurch angestellten Beobachtungen zu finden, u. d. m.

94) Aufgabe. In jeder arithmetischen Proportion aus je drey gegebenen Gliedern das vierte zu finden. Unter den gegebenen befinden sich entweder die beyden

mittlern, oder die beyden äussern Glieder. Man addire die beyden zusammen gehörigen Glieder, und ziehe von ihren Summen das dritte gegebene Glied ab, so findet man das Gesuchte. Der Beweis folgt aus (92). Beyspiel:

Zu den Zahlen 3, 5, 7, die vierte arithmetische Proportionzahl zu finden. Sie ist $=(5+7)-3=9$, und die arithmetische Proportion $3-5=7-9$.

Suchte man in dieser Proportion das nachfolgende Glied des ersten Verhältnisses, so findet man es $=(3+9)-7=5$.

Von der geometrischen Proportion.

95) Satz. Zwey geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind. — Denn vermöge 89 entstehen alsdann die nachfolgenden Glieder in beyden Verhältnissen auf gleiche Art durch die Multiplication des Exponenten mit den vorhergehenden Gliedern.

Wenn zwey geometrische Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich, denn alle drey haben alsdann einerley Exponenten. Es ist dieß nur ein besonderer Fall des allgemeinen mathematischen Grundsatzes. **Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich.**

96) Erklärung. Die Verbindung zweyer gleichen geometrischen Verhältnisse nennt man eine **geometrische Proportion.** z. B.

$$3 : 12 = 4 : 16.$$

Man lese: 3 verhält sich zu 12 wie 4 zu 16. 3 und 16 heißen die äußern, 12 und 4 die mittlern Glieder der Proportion. Sind die mittlern Glieder gleich, so heißt die Proportion eine stätige:

$$4 : 8 = 8 : 16.$$

Das mittlere Glied (im Beyspiel 8) heißt die mittlere geometrische Proportionzahl zwischen den äussern 4 und 16.

97) Satz. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der mittlern Glieder gleich dem Produkte der äussern Glieder. Man drücke das nachfolgende Glied in jedem Verhältniß durch das vorhergehende und den Exponenten aus, so erhellet, daß sowohl das Produkt der mittlern als der äussern Glieder aus den vorhergehenden Gliedern der beyden Verhältnisse und dem Exponenten entsteht. z. B.

$$\overset{3}{} \qquad \overset{3}{}$$
$$4 : 12 = 8 : 24$$
$$4 : 3.4 = 8 : 3.8$$
$$4.3.8 = 3.4.8.$$

Anderes Beyspiel.

$$\overset{\frac{2}{3}}{} \qquad \overset{\frac{2}{3}}{}$$
$$3 : 2 = 6 : 4$$
$$3 : 3.\tfrac{2}{3} = 6 : 6.\tfrac{2}{3}$$
$$3 . 6.\tfrac{2}{3} = 3.\tfrac{2}{3} . 6$$

Hieraus folgt, daß man aus zwey gleichen Produkten rückwärts eine geometrische Proportion bilden kann, wenn man die Factoren des einen Produktes zu den äussern, die Factorn des andern zu den mittlern Gliedern macht. z. B.

$$20 = 4 . 5 = 2 . 10$$
Daher $4 : 2 = 10 : 5$
oder $2 : 4 = 5 : 10$

98) Satz. In einer stetigen geometrischen Proportion ist das Produkt der äussern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Glieds. Man findet daher zwi-

schen zwey Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl, wenn man die beyden Zahlen mit einander multiplicirt, und aus ihrem Produkte die Quadratwurzel extrahirt. z. B. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 4 und 16 zu finden:

$$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$$

und $$4 : 8 = 8 : 16$$

99) Aufgabe. In jeder geometrischen Proportion aus drey gegebenen Gliedern das vierte zu finden.

Unter den gegebenen Gliedern befinden sich entweder die äussern oder die mittlern Glieder. Man multiplicire die beyden zusammengehörigen Glieder, und dividire das Produkt durch das dritte gegebene Glied, so erhält man das Gesuchte. z. B.

$$3 : 9 = 4 : 12.$$

Es werde das zweyte Glied gesucht, so hat man $9 = \frac{3 \cdot 12}{4}$, oder es werde das letzte Glied gesucht, so hat man $12 = \frac{9 \cdot 4}{3}$.

Diesen Fall enthält die sogenannte Regula de Tri, wo man zu den drey ersten Gliedern einer geometrischen Proportion das 4te oder letzte Glied sucht. Die Vorschrift in practischen Rechenbüchern lautet: man multiplicire das zweyte und dritte Glied, und dividire durch das erste.

Von den mancherley Rechnungsarten wird gleich unten mehr vorkommen.

100) Satz. Ein geometrisches Verhältniß ändert sich nicht, wenn man beyde Glieder des Verhältnisses mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret. Die Größe eines Verhältnisses beruht nicht auf der Größe seiner Glieder, sondern auf der Größe des Exponenten.

dieser ändert sich aber nicht, wenn man beyde Glieder des Verhältnisses mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret. Denn das nachfolgende Glied enthält das vorhergehende Glied so vielmal als der Exponent anzeigt, und wenn man beyde Glieder durch eine Zahl multipliciret oder dividiret, so wird das vorhergehende Glied so vielmal größer oder kleiner, als jeder Theil des nachfolgendenden größer oder kleiner wird. Folglich entsteht dieses aus jenem noch auf dieselbe Weise.

Z. B. 4 : 12 Exponent = 3

5.4 : 5.12 Exponent = 3 denn es ist

4 : 12 = 4 : 3. 4

5.4 : 5.12 = 5.4 : 3. 5. 4

oder

8 : 16 Exponent = 2

$\frac{8}{4}$: $\frac{16}{4}$ Exponent = 2 denn

8 : 16 = 8 : 2. 8

$\frac{8}{4}$: $\frac{16}{4}$ = $\frac{8}{4}$: 2. $\frac{8}{4}$

Vermöge des Satzes, daß Verhältnisse sich nicht ändern, wenn man ihre Glieder durch einerley Zahl multipliciret oder dividiret, kann man sich in praktischen Rechnungen oft einen Vortheil verschaffen, wenn man aus drey gegebenen Gliedern einer Proportion das 4te sucht. Man bringt das gegebene Verhältniß auf die kleinsten Zahlen, wenn sich die Glieder desselben durch einerley Größe dividiren lassen. Z. B.

8 : 40 = 16 : Gesuchten

1 : 5 = 16 : Gesuchten = 5.16 = 80.

101) **Satz.** In jeder geometrischen Proportion sind auch die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder von beyden Verhältnissen in geometrischer Proportion. Dieß erhellet aus dem vorhergehenden Satz, weil die nach-

nachfolgenden Glieder gleiche Vielfache der Vorhergehenden durch den Exponenten sind. Z. B.

$$9 : 27 = 12 : 36$$

daher

$$9 : 12 = 27 : 36$$

denn

$$9 : 12 = 3.9 : 3.12$$

Ueberhaupt wenn durch Verwechselung der Stellung der Glieder die Gleichheit der Produkte der äussern und mittlern Glieder nicht aufgehoben wird, so bleibt die Proportion richtig. Hieraus fließen folgende Veränderungen einer Proportion:

$$9 : 27 = 12 : 36$$
$$27 : 9 = 36 : 12$$
$$9 : 12 = 27 : 36$$
$$12 : 9 = 36 : 27$$

102) Satz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summa oder der Unterschied der Glieder der beyden Verhältnisse, wie die vorhergehenden Glieder oder wie die nachfolgenden Glieder. Z. B.

$$27 : 9 = 36 : 12 \quad (A$$
$$27 \pm 9 : 36 \pm 12 = 27 : 36 = 9 : 12 \quad (B$$

Man drücke die nachfolgenden Glieder durch die vorhergehenden und den Exponenten aus, so hat man für A)

$27 : \frac{1}{3}.27 = 36 : \frac{1}{3}.36$ es ist aber

$27 \pm \frac{1}{3}27 = 27.(1 \pm \frac{1}{3})$

$36 \pm \frac{1}{3}.36 = 36.(1 \pm \frac{1}{3})$

daher die Proportion B.)

$$27.(1 \pm \tfrac{1}{3}) : 36.(1 \pm \tfrac{1}{3}) = 27 : 36$$

vermöge (100 §.). Ueberhaupt erhellet, daß durch Summirung oder Abziehung der Glieder in beyden Verhältnissen einer Proportion gleiche Vielfache der vorhergehenden Glieder entstehen, welche sich wie die vorhergehenden oder wie die nachfolgenden Glieder verhalten.

103) Anmerkung. Auch dieses Satzes kann man sich zuweilen bey Anwendung der Regula de Tri zur Abkürzung der Rechnung bedienen. Wenn die beyden Glieder des ersten Verhältnisses wenig von einander unterschieden sind, so werden es auch die beyden Glieder des andern Verhältnisses seyn. Man berechnet alsdann kürzer statt des gesuchten Gliedes seinen Unterschied von dem zugehörigen Gliede des zweyten Verhältnisses. Z. B.

5 : 6 = 30 : Gesuchten

Man sage

5 : 30 = 6 — 5 : Unterschied

giebt 6 für den Unterschied, also das Gesuchte = 36.

Anwendung der Lehre von den Proportionen.

Regula de Tri.

104) Satz. Zwey Verhältnisse können gleich seyn, obschon die Größen, auf welche sich die Glieder eines jeden Verhältnisses beziehen, von verschiedener Art sind, wenn nur die vorhergehenden Glieder aus den nachfolgenden auf einerley Weise entstehen. So verhalten sich z. B. Waaren wie die zugehörigen Preise, Kapitalien wie die Zinsen, welche sie in gleichen Zeiten zu gleichen Procenten ertragen u. s. w. Aus der Natur der Sache muß man beurtheilen, ob gleiche

Verhältnisse zwischen verschiedenartigen Größen statt finden. Ist dieß, so lassen sie sich zu einer geometrischen Proportion verknüpfen. In jedes Verhältniß müssen gleichartige Größen gestellt werden. Z. B.

℔	℔	fl.	fl.
3	: 12	= 6	: 24

d. i. wenn 3 ℔ 6 fl. kosten, so kosten 12 ℔ 24 fl.

Wäre der Preis der letztern gesucht, so stünde die Rechnung nach der Vorschrift der Practiker so:

℔	fl.	℔
3	— 6	— 12

Die Regel lautet: man multiplicire 12 ℔ mit 6 fl. und dividire durch 3 ℔.

Wie verträgt sich dieß mit den ersten Grundsätzen der Arithmetik, nach welchen nur gleichartige Größen in Verbindung gebracht werden können? Die Antwort ist: man betrachtet die Glieder der Proportion als bloße Zahlen, und sucht nur die Größe des vierten Gliedes. Von welcher Beschaffenheit dieß Glied ist, weiß man ohnehin schon

℔	℔			
3	: 12	=	3	: 12
6 fl.	: 24 fl.	=	6	: 24

daher 3 : 12 = 6 : 24 und nach (101)

3 : 6 = 12 : 24, giebt $\frac{6 \cdot 12}{3} = 24$

woraus die Richtigkeit der practischen Vorschrift erhellet.

Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele:

100 ℔ kosten 34 fl., was kosten $12\frac{1}{2}$ ℔?

100 ℔ : $12\frac{1}{2}$ ℔ = 34 fl. : Ges. vermöge (100)

8 ℔ : 1 ℔ = 34 fl. : Ges. Gesuchte $= \frac{1 \cdot 34}{8} =$

$= 4\frac{1}{4}$ fl. = 4 fl. 15 kr.

2tes Beyspiel:

20 ℔ kosten 45 fl., was kosten $312\frac{1}{4}$ ℔?

℔		℔		fl.	
20	:	$312\frac{1}{4}$	=	45	: Ges. vermöge (100 u. 101)
4	:	$312\frac{1}{4}$	=	9	: Gesuchten

$$\text{Gesuchte} = \frac{312\frac{1}{4} \cdot 9}{4} = 702\frac{9}{16} \text{ fl.}$$

105) Anmerkung. Wenn die gleichnamigen Glieder Brüche von verschiedenen Nennern enthalten, so bringe man sie unter einerley Benennung, und schreibe das Verhältniß der Zähler statt der Brüche. Z. B.

$\frac{3}{4}$ ℔ kosten 10 fl., was kosten $2\frac{2}{3}$ ℔?

$\frac{3}{4}$ ℔ : $2\frac{2}{3}$ ℔ = 10 : Ges.

$\frac{9}{12}$: $\frac{32}{12}$ = 10 : Ges.

vermöge (100)

9 : 32 = 10 : Ges. Gesuchte =

$$= \frac{32 \cdot 10}{9} = 35\frac{5}{9} \text{ fl.}$$

106) Anmerkung. Wenn unter den gegebenen Gliedern mehrere verschiedene Einheiten enthalten, so bringe man sie auf die kleinsten Einheiten. Ist das mit dem Gesuchten gleichnamige Glied ebenfalls in den kleinsten Einheiten ausgedrückt, so findet man das Gesuchte in denselben Einheiten. Z. B.

3 ℔ 12 Loth kosten 7 fl. 20 kr., was kosten 12 ℔?

3 ℔ 12 Loth : 12 ℔ = 7 fl. 20 kr. : Ges.

108 Loth : 384 Loth = 440 kr. : Ges.

27 : 96 = 440 :

9 : 32 = 440 :

$$\text{Gesuchte} = \frac{32 \cdot 440}{9} = 1564\frac{4}{9} \text{ kr.} = 26 \text{ fl. } 4\frac{4}{9} \text{ kr.}$$

107) Anmerkung. Oft ist es bequemer, die kleineren Einheiten als Theile der größern anzusehen, und sie als Brüche von diesen auszudrücken. Man erspart sich dadurch weitläuftige Reductionen, z. B.

100 ℔ kosten 12 fl. 24 kr., was 44 ℔ 20 Loth?

$\frac{1}{3}$ fl. = 20 kr. $\frac{1}{2}$ ℔ = 16 Loth

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ fl. = 4 kr. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ ℔ = 4 Loth

Man sehe die gleichnamigen Glieder als abstracte Zahlen an, und multiplicire wie folgt:

44 .	12 fl.	=	528 fl.	
44 .	$\frac{1}{3}$ fl.	=	14 fl.	40 kr.
44 .	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ fl.	=	2 fl.	56 kr.
$\frac{1}{2}$.	12 fl. 24 kr.	=	6 fl.	12 kr.
$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$ · 12 fl. 24 kr.	=	1 fl.	33 kr.
		Summe =	553 fl.	21 kr.

dividiret durch 100 = 5 fl. 32, 01 kr.

Man nennt dieses Verfahren die Zerstreuung in Factoren. Man drückt die kleineren Einheiten in solchen Brüchen der größern aus, deren Zähler 1. ist, weil man sich dadurch die Multiplication mit dem Zähler erspart.

108) Anmerkung. Oft nehmen Größen in den Verhältnissen ab, wie andere wachsen. Man sagt alsdann, sie stehen in verkehrter Verhältniß (in ratione reciproca), und nennt die Rechnung mit ihnen die verkehrte Regel de Tri. Es sind dazu keine besondere Vorschriften nöthig, indem man bloß aus der Natur der Dinge beurtheilen muß, ob ein directes oder verkehrtes Verhältniß zwischen ihnen statt findet. Die Menge der Waare, welche man für ein bestimmtes Geld kauft, verhält sich umgekehrt wie der Preis derselben, die Anzahl der Fuße, welche in einer bestimmten Länge enthalten sind, verhält sich umgekehrt wie die Größe des Fußes, die Zeit, binnen welcher eine

Die drey letzten Verhältnisse geben in der Zusammensetzung eben das, was die drey ersten geben, weil sie alle dem Verhältniß 1 : 2 gleich sind.

111) Satz. Wenn in Verhältnissen, welche zusammengesetzt werden, das vorhergehende Glied des einen Verhältnisses gleich dem nachfolgenden Gliede des andern Verhältnisses ist, so heben sich die gleichen Glieder bey der Zusammensetzung gegen einander auf

$$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ \hline 1.2 : 2.4 = 1 : 4 \end{array}$$ (100.)

112) Satz. Eine Größe, welche von mehreren andern zugleich so bestimmt wird, daß sie mit jeder derselben, wenn man die übrigen unveränderlich annimmt, in geometrischem Verhältniß wächset oder abnimmt, steht in dem zusammengesetzten Verhältniß von allen diesen Größen.

So steht z. B. der zurückgelegte Weg eines gleichförmig bewegten Körpers in dem zusammengesetzten Verhältniß der Zeit und der Geschwindigkeit. Denn ein Körper bewegt sich in einerley Zeit bey doppelter Geschwindigkeit noch einmal so weit, und bey einerley Geschwindigkeit in der doppelten Zeit ebenfals noch einmal so weit, also bey doppelter Geschwindigkeit in der doppelten Zeit viermal so weit. Die Geschwindigkeit eines Körpers A sey 3, die Dauer seiner Bewegung 5, die Geschwindigkeit eines Körpers B 4, die Dauer seiner Bewegung 6, so ist der Weg von A zu dem Weg von B $= \begin{matrix} 3 : 4 \\ 5 : 6 \end{matrix} = 15 . 24 = 5 : 8.$

113) Anmerkung. Es können in dem zusammengesetzten Verhältniß auch verkehrte Verhältnisse vorkommen, wenn die zu bestimmende Größe wächset, indem eine oder mehrere der Größen, wodurch sie be-

stimmt wird, abnehmen, oder umgekehrt: das Verhältniß zweyer Capitalien, welche zu gleichen Procenten ausgeliehen sind, ist zusammengesetzt aus dem umgekehrten Verhältniß der Zeit, während sie ausstehen, und dem directen Verhältniß der Interessen. Denn das Capital, welches noch einmal so viel Interessen in derselben Zeit trägt, ist noch einmal so groß. Hingegen kann ein kleineres Capital in längerer Zeit eben so viel Interessen tragen als ein größeres Capital in kürzerer Zeit.

114) Aufgabe. 100 fl. Capital trage in einem Jahr 5 fl. Interessen; wie groß ist das Capital, welches in 4 Jahren 240 fl. Interessen trägt? Man setze

Inter.		Inter.		
5	:	240	}	= 100 : Ges.
4 Jahr	:	1 Jahr		

oder: 4 . 5 : 1 . 240 = 100 : Ges.
4 : 48 = 100 : Ges.
1 : 12 = 100 : Ges.

also das gesuchte Capital = 1200 fl.

115) Anmerkung. Diese Rechnung heißt die Regel von Fünfen (regula de quinque), weil fünf Sätze gegeben sind. Eben so entsteht die regula de septem, wenn 7 Sätze gegeben sind, oder das erste Verhältniß aus drey Verhältnissen zusammengesetzt wird.

Z. B. 100 fl. Capital tragen in 1 Jahr zu 5 Procent 5 fl. Interessen, wie viel tragen 3200 fl. Capital zu 4 Procent in 3 Jahren Interessen?

1 Jahr	:	3 Jahr	}
5 Proc.	:	4 Proc.	} = 5. fl. : Ges.
100 Cap.	:	3200 Capit.	}

1 . 5 . 100 : 3 . 4 . 3200 = 5 : Ges.
1 : 3 . 4 . 32 = 1 : Ges.

also die gesuchten Interessen = 384 fl.

116) Anmerkung. Es ist begreiflich, daß man diese Rechnungen auch durch eine wiederholte Regel de Tri auflösen könnte. Das Exempel des vorhergehenden Paragraphs sähe so aus:

1 Jahr	: 3 Jahr	= 5 Int.	:	15 Int.
5 Proc.	: 4 Proc.	= 15 Int.	:	12 Int.
100 Cap.	: 3200 Cap.	= 12 Int.	:	384 Int.

In der ersten Proportion setzt man alles bis auf die Zeiten, in der zweyten alles bis auf die Procenten, in der dritten alles bis auf die Capitalien gleich. Die Zusammensetzung der Verhältnisse erspart diese wiederholte Regel de Tri.

117) Anmerkung. Der Fälle, wo Verhältnisse zusammengesetzt werden müssen, kommen unzählig viele vor. Hier folgt noch ein Beyspiel von einer Geld- oder Wechselrechnung, wobey die Zusammensetzung der Verhältnisse von der Stellung der Glieder den Namen der Kettenregel erhalten hat. Wie viel betragen 200 Conventionsthaler in hannövrischen Thalern Cassenmünze? Es seyen folgende Verhältnisse gegeben:

5 Convent. Thlr.	=	12 fl. rheinisch.
1 Louisd'or	=	9 fl. rheinisch.
7 fl. Cassengeld	=	1 Louisd'or.
3 fl. Cassengeld	=	2 Thlr. hannövr.

Man setze nach der Kettenregel so an:

* Hannövr. Thlr.	—	200 Convent. Thlr.
5 Convent. Thlr.	—	12 fl. rheinisch.
9 fl. rheinisch	—	1 Louisd'or.
1 Louisd'or	—	7 fl. Cassenmünze.
3 fl. Cassenmünz.	=	2 hannövr. Thlr.

Multiplicire alles was rechter Hand, und alles was linker Hand steht, und dividire mit dem Produkt linker Hand in das Produkt rechter Hand. Hiernach

wäre die gesuchte Menge von hannövrischen Thalern $= \frac{200 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3} = 248\frac{8}{9}$.

Der Grund dieser Rechnung erhellet aus der Zusammensetzung der Verhältnisse folgendermaßen:

Conv. Thlr.	: Rhein. fl.	=	12 : 5
Rhein. fl.	: Louisd'or	=	1 : 9
Louisd'or	: fl. Cassenmz.	=	7 : 1
fl. Cass. mnz.	: Hann. Thlr.	=	2 : 3

also Conv. Thlr. : Hann. Thlr. = 12.1.7.2 : 5.9.1.3

also 1 Conv. Thlr. $= \frac{12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}$ Hannövr. Thlr.

folglich 200 Convent. Thlr. 200. $\frac{12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}$

118) **Aufgabe.** Eine Größe in zwey oder mehr Theile zu theilen, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben. Man sage, die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen verhält sich zur gegebenen Größe, wie jede einzelne Verhältnißzahl zum gesuchten Theil, oder kürzer, man theile die gegebene Größe durch die Summe der Verhältnißzahlen, und multiplicire den Quotienten mit jeder einzelnen Verhältnißzahl.

119) **Anmerkung.** Wenn die Verhältnisse nicht in den kleinsten Zahlen gegeben sind, so bringe man sie zur Erleichterung der Rechnung auf die kleinsten Zahlen. Von der Anwendung, welche man von vorstehender Aufgabe häufig macht, hat dieselbe den Namen Gesellschaftsrechnung erhalten. z. B. Drey Kaufleute A, B, C legen 10000 fl. zusammen, und gewinnen damit 2400 fl. A hat 2000 fl. B 3000 fl. und C 5000 fl. gegeben, wie viel erhält jeder von dem Gewinnst nach Verhältniß seines Beytrags? Die Verhältnisse der Zahlen 2000 : 3000 : 5000 sind 2 : 3 : 5.

vermöge (100 §.). Ueberhaupt erhellet, daß durch Summirung oder Abziehung der Glieder in beyden Verhältnissen einer Proportion gleiche Vielfache der vorhergehenden Glieder entstehen, welche sich wie die vorhergehenden oder wie die nachfolgenden Glieder verhalten.

103) Anmerkung. Auch dieses Satzes kann man sich zuweilen bey Anwendung der Regula de Tri zur Abkürzung der Rechnung bedienen. Wenn die beyden Glieder des ersten Verhältnisses wenig von einander unterschieden sind, so werden es auch die beyden Glieder des andern Verhältnisses seyn. Man berechnet alsdann kürzer statt des gesuchten Gliedes seinen Unterschied von dem zugehörigen Gliede des zweyten Verhältnisses. Z. B.

$$5 : 6 = 30 : \text{Gesuchten}$$

Man sage

$$5 : 30 = 6 - 5 : \text{Unterschied}$$

giebt 6 für den Unterschied, also das Gesuchte = 36.

Anwendung der Lehre von den Proportionen.

Regula de Tri.

104) Satz. Zwey Verhältnisse können gleich seyn, obschon die Größen, auf welche sich die Glieder eines jeden Verhältnisses beziehen, von verschiedener Art sind, wenn nur die vorhergehenden Glieder aus den nachfolgenden auf einerley Weise entstehen. So verhalten sich z. B. Waaren wie die zugehörigen Preise, Kapitalien wie die Zinsen, welche sie in gleichen Zeiten zu gleichen Procenten ertragen u. s. w. Aus der Natur der Sache muß man beurtheilen, ob gleiche

Verhältnisse zwischen verschiedenartigen Größen statt finden. Ist dieß, so lassen sie sich zu einer geometrischen Proportion verknüpfen. In jedes Verhältniß müssen gleichartige Größen gestellt werden. Z. B.

℔		℔		fl.		fl.	
3	:	12	=	6	:	24	

d. i. wenn 3 ℔ 6 fl. kosten, so kosten 12 ℔ 24 fl.

Wäre der Preis der letztern gesucht, so stünde die Rechnung nach der Vorschrift der Practiker so:

℔		fl.		℔
3	—	6	—	12

Die Regel lautet: man multiplicire 12 ℔ mit 6 fl. und dividire durch 3 ℔.

Wie verträgt sich dieß mit den ersten Grundsätzen der Arithmetik, nach welchen nur gleichartige Größen in Verbindung gebracht werden können? Die Antwort ist: man betrachtet die Glieder der Proportion als bloße Zahlen, und sucht nur die Größe des vierten Gliedes. Von welcher Beschaffenheit dieß Glied ist, weiß man ohnehin schon

	℔		℔					
	3	:	12	=	3	:	12	
	6 fl.	:	24 fl.	=	6	:	24	
daher	3	:	12	=	6	:	24	und nach (101)

3 : 6 = 12 : 24, giebt $\frac{6 \cdot 12}{3} = 24$

woraus die Richtigkeit der practischen Vorschrift erhellet.

Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele:

100 ℔ kosten 34 fl., was kosten $12\frac{1}{2}$ ℔?

100 ℔ : $12\frac{1}{2}$ ℔ = 34 fl. : Ges. vermöge (100)

8 ℔ : 1 ℔ = 34 fl. : Ges. Gesuchte = $\frac{1 \cdot 34}{8}$ =

= $4\frac{1}{4}$ fl. = 4 fl. 15 kr.

2tes Beyspiel:

20 ℔ kosten 45 fl., was kosten $312\frac{1}{4}$ ℔?

℔	℔	fl.	
20	: $312\frac{1}{4}$	= 45	: Ges. vermöge (100 u. 101)
4	: $312\frac{1}{4}$	= 9	: Gesuchten

$$\text{Gesuchte} = \frac{312\frac{1}{4} \cdot 9}{4} = 702\frac{9}{16} \text{ fl.}$$

105) Anmerkung. Wenn die gleichnamigen Glieder Brüche von verschiedenen Nennern enthalten, so bringe man sie unter einerley Benennung, und schreibe das Verhältniß der Zähler statt der Brüche. Z. B.

$\frac{3}{4}$ ℔ kosten 10 fl., was kosten $2\frac{2}{3}$ ℔?

$\frac{3}{4}$ ℔ : $2\frac{2}{3}$ ℔ = 10 : Ges.

$\frac{9}{12}$: $\frac{32}{12}$ = 10 : Ges.

vermöge (100)

9 : 32 = 10 : Ges. Gesuchte =

$$= \frac{32 \cdot 10}{9} = 35\frac{5}{9} \text{ fl.}$$

106) Anmerkung. Wenn unter den gegebenen Gliedern mehrere verschiedene Einheiten enthalten, so bringe man sie auf die kleinsten Einheiten. Ist das mit dem Gesuchten gleichnamige Glied ebenfalls in den kleinsten Einheiten ausgedrückt, so findet man das Gesuchte in denselben Einheiten. Z. B.

3 ℔ 12 Loth kosten 7 fl. 20 kr., was kosten 12 ℔?

3 ℔ 12 Loth : 12 ℔ = 7 fl. 20 kr. : Ges.

108 Loth : 384 Loth = 440 kr. : Ges.

27 : 96 = 440 :

9 : 32 = 440 :

$$\text{Gesuchte} = \frac{32 \cdot 440}{9} = 1564\frac{4}{9} \text{ kr.} = 26 \text{ fl. } 4\frac{4}{9} \text{ kr.}$$

107) Anmerkung. Oft ist es bequemer, die kleineren Einheiten als Theile der größern anzusehen, und sie als Brüche von diesen auszudrücken. Man erspart sich dadurch weitläuftige Reductionen, z. B.

100 ℔ kosten 12 fl. 24 kr., was 44 ℔ 20 Loth?

$\frac{1}{3}$ fl. = 20 kr. $\frac{1}{2}$ ℔ = 16 Loth

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ fl. = 4 kr. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ ℔ = 4 Loth

Man sehe die gleichnamigen Glieder als abstracte Zahlen an, und multiplicire wie folgt:

44	. 12	fl.	=	528 fl.
44	. $\frac{1}{3}$	fl.	=	14 fl. 40 kr.
44	. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$	fl.	=	2 fl. 56 kr.
$\frac{1}{2}$	. 12 fl.	24 kr.	=	6 fl. 12 kr.
$\frac{1}{4}$	. $\frac{1}{2}$ 12 fl.	24 kr.	=	1 fl. 33 kr.
			Summe =	553 fl. 21 kr.

dividiret durch 100 = 5 fl. 32, 01 kr.

Man nennt dieses Verfahren die Zerstreuung in Factoren. Man drückt die kleineren Einheiten in solchen Brüchen der größern aus, deren Zähler 1. ist, weil man sich dadurch die Multiplication mit dem Zähler erspart.

108) Anmerkung. Oft nehmen Größen in den Verhältnissen ab, wie andere wachsen. Man sagt alsdann, sie stehen in verkehrter Verhältniß (in ratione reciproca), und nennt die Rechnung mit ihnen die verkehrte Regel de Tri. Es sind dazu keine besondere Vorschriften nöthig, indem man bloß aus der Natur der Dinge beurtheilen muß, ob ein directes oder verkehrtes Verhältniß zwischen ihnen statt findet. Die Menge der Waare, welche man für ein bestimmtes Geld kauft, verhält sich umgekehrt wie der Preis derselben, die Anzahl der Fuße, welche in einer bestimmten Länge enthalten sind, verhält sich umgekehrt wie die Größe des Fußes, die Zeit, binnen welcher eine

gewisse Arbeit fertig wird, umgekehrt wie die Zahl der Arbeiter u. dgl. m.

Einige Beyspiele der verkehrten Regel de Tri: Wie viel pariser Fuß machen 100 rheinländische, wenn sich der Pariser Fuß zum rheinländischen verhält wie 1440 : 1391? Weil der Pariser Fuß der größere ist, so erhält man weniger pariser Fuße. Man sagt daher:

$$1440 : 1391 = 100 \text{ rhl.} : \frac{1391 \cdot 100}{1440} \text{ pariser.}$$

Die Glieder der Proportion müssen in beyden Verhältnissen einerley Ordnung haben. Wenn das Gesuchte kleiner ist als das Gegebene, so muß auch im ersten Verhältniß das nachfolgende Glied kleiner seyn als das vorhergehende.

Zwölf Arbeiter machen eine Arbeit in 6 Tagen fertig; die Arbeit soll in $2\frac{1}{2}$ Tagen beendigt werden, wie viel Arbeiter sind nöthig? Weil mehr Arbeiter nöthig sind, so sage man:

$$2\tfrac{1}{2} : 6 = 12 : \text{Ges.}$$
$$\tfrac{5}{2} : \tfrac{12}{2} = 12 : \text{Ges.}$$
$$5 : 12 = 12 : \text{Ges.}$$
$$\text{Gesuchte} = \frac{12 \cdot 12}{5} = 28\tfrac{4}{5}$$

Wofür man begreiflich 29 Arbeiter rechnen wird.

Zusammensetzung der Verhältnisse.

109) Satz. Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man die Glieder derselben mit einander multipliciret.

$$\left.\begin{matrix} 3 : 4 \\ 2 : 6 \end{matrix}\right\} 6 : 24 \text{ zusammengesetztes Verhältniß.}$$

Man kann nämlich das Verhältniß zweyer Größen unmittelbar oder durch mehrere Zwischenverhältnisse angeben. Wenn jemand fragt: wie verhält sich der Gulden zum Kreuzer? so könnte man geradezu antworten: wie 60 : 1. Die Frage würde aber auch beantwortet, wenn man sagte: der Batzen verhält sich zum Gulden wie 1 : 15, und der Kreuzer zum Batzen wie 1 : 4, woraus jenes Verhältniß i. 1 : 4. 15 = 1 : 60 fließet. Man kommt auf das Verhältniß des Kreuzers zum Gulden, wenn man den Kreuzer viermal und dies Vierfache wieder fünfzehnmal nimmt.

110) Zusatz. Wenn die Verhältnisse, welche zusammengesetzt werden, einander gleich sind, so heißt das zusammengesetzte Verhältniß ein Vervielfachtes, ein Gedoppeltes, wenn es aus zwey gleichen, ein dreyfaches, wenn es aus drey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist und so weiter.

Das Verhältniß des Batzens, z. B. zum Pfenning, ist das Gedoppelte des Kreuzers zum Pfenning, denn es ist

$$\begin{array}{rl} \text{Batz.} : \text{Kreuz.} & = 4 : 1 \\ \text{Kreuz.} : \text{Pfenn.} & = 4 : 1 \\ \hline \text{daher } \text{Batz.} : \text{Pfenn.} & = 4^2 : 1 \end{array}$$

Ueberhaupt ist das Verhältniß des Quadrates zur Einheit, das gedoppelte der Wurzel zur Einheit. Eben so ist das Verhältniß des Würfels zur Einheit das dreyfache Verhältniß der Wurzel zur Einheit.

$$1 : 2^3 = \begin{cases} 1 : 2 \\ 1 : 2 \\ 1 : 2 \end{cases}$$

$$\text{oder } 1 : 2^3 = \begin{cases} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ 4 : 8 \end{cases}$$

Die drey letzten Verhältnisse geben in der Zusammensetzung eben das, was die drey ersten geben, weil sie alle dem Verhältniß 1 : 2 gleich sind.

111) Satz. Wenn in Verhältnissen, welche zusammengesetzt werden, das vorhergehende Glied des einen Verhältnisses gleich dem nachfolgenden Gliede des andern Verhältnisses ist, so heben sich die gleichen Glieder bey der Zusammensetzung gegen einander auf

$$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ \hline 1.2 : 2.4 = 1 : 4 \end{array} \quad (100.)$$

112) Satz. Eine Größe, welche von mehreren andern zugleich so bestimmt wird, daß sie mit jeder derselben, wenn man die übrigen unveränderlich annimmt, in geometrischem Verhältniß wächset oder abnimmt, steht in dem zusammengesetzten Verhältniß von allen diesen Größen.

So steht z. B. der zurückgelegte Weg eines gleichförmig bewegten Körpers in dem zusammengesetzten Verhältniß der Zeit und der Geschwindigkeit. Denn ein Körper bewegt sich in einerley Zeit bey doppelter Geschwindigkeit noch einmal so weit, und bey einerley Geschwindigkeit in der doppelten Zeit ebenfals noch einmal so weit, also bey doppelter Geschwindigkeit in der doppelten Zeit viermal so weit. Die Geschwindigkeit eines Körpers A sey 3, die Dauer seiner Bewegung 5, die Geschwindigkeit eines Körpers B 4, die Dauer seiner Bewegung 6, so ist der Weg von A zu dem Weg von B $= \begin{matrix} 3 : 4 \\ 5 : 6 \end{matrix} = 15 . 24 = 5 : 8.$

113) Anmerkung. Es können in dem zusammengesetzten Verhältniß auch verkehrte Verhältnisse vorkommen, wenn die zu bestimmende Größe wächset, indem eine oder mehrere der Größen, wodurch sie be-

nimmt wird, abnehmen, oder umgekehrt: das Verhältniß zweyer Capitalien, welche zu gleichen Procenten ausgeliehen sind, ist zusammengesetzt aus dem umgekehrten Verhältniß der Zeit, während sie ausstehen, und dem directen Verhältniß der Interessen. Denn das Capital, welches noch einmal so viel Interessen in derselben Zeit trägt, ist noch einmal so groß. Hingegen kann ein kleineres Capital in längerer Zeit eben so viel Interessen tragen als ein größeres Capital in kürzerer Zeit.

114) Aufgabe. 100 fl. Capital trage in einem Jahr 5 fl. Interessen; wie groß ist das Capital, welches in 4 Jahren 240 fl. Interessen trägt? Man setze

Inter.		Inter.		
5	:	240	}	= 100 : Ges.
4 Jahr	:	1 Jahr		

oder: 4 . 5 : 1 . 240 = 100 : Ges.
4 : 48 = 100 : Ges.
1 : 12 = 100 : Ges.

also das gesuchte Capital = 1200 fl.

115) Anmerkung. Diese Rechnung heißt die Regel von Fünfen (regula de quinque), weil fünf Sätze gegeben sind. Eben so entsteht die regula de septem, wenn 7 Sätze gegeben sind, oder das erste Verhältniß aus drey Verhältnissen zusammengesetzt wird.

Z. B. 100 fl. Capital tragen in 1 Jahr zu 5 Procent 5 fl. Interessen, wie viel tragen 3200 fl. Capital zu 4 Procent in 3 Jahren Interessen?

1 Jahr	:	3 Jahr	}	= 5. fl. : Ges.
5 Proc.	:	4 Proc.		
100 Cap.	:	3200 Capit.		

1 . ƒ . 1ØØ : 3 . 4 . 32ØØ = ƒ : Ges.
1 : 3 . 4 . 32 = 1 : Ges.

also die gesuchten Interessen = 384 fl.

116) Anmerkung. Es ist begreiflich, daß man diese Rechnungen auch durch eine wiederholte Regel de Tri auflösen könnte. Das Exempel des vorhergehenden Paragraphs sähe so aus:

1 Jahr : 3 Jahr = 5 Int. : 15 Int.
5 Proc. : 4 Proc. = 15 Int. : 12 Int.
100 Cap. : 3200 Cap. = 12 Int. : 384 Int.

In der ersten Proportion setzt man alles bis auf die Zeiten, in der zweyten alles bis auf die Procenten, in der dritten alles bis auf die Capitalien gleich. Die Zusammensetzung der Verhältnisse erspart diese wiederholte Regel de Tri.

117) Anmerkung. Der Fälle, wo Verhältnisse zusammengesetzt werden müssen, kommen unzählig viele vor. Hier folgt noch ein Beyspiel von einer Geld- oder Wechselrechnung, wobey die Zusammensetzung der Verhältnisse von der Stellung der Glieder den Namen der Kettenregel erhalten hat. Wie viel betragen 200 Conventionsthaler in hannövrischen Thalern Cassenmünze? Es seyen folgende Verhältnisse gegeben:

5 Convent. Thlr. = 12 fl. rheinisch.
1 Louisd'or = 9 fl. rheinisch.
7 fl. Cassengeld = 1 Louisd'or.
3 fl. Cassengeld = 2 Thlr. hannövr.

Man setze nach der Kettenregel so an:

* Hannövr. Thlr. — 200 Convent. Thlr.
5 Convent. Thlr. — 12 fl. rheinisch.
9 fl. rheinisch — 1 Louisd'or.
1 Louisd'or — 7 fl. Cassenmünze.
3 fl. Cassenmünz. = 2 hannövr. Thlr.

Multiplicire alles was rechter Hand, und alles was linker Hand steht, und dividire mit dem Produkt linker Hand in das Produkt rechter Hand. Hiernach

wäre die gesuchte Menge von hannövrischen Thalern $= \frac{200 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3} = 248\frac{8}{9}$.

Der Grund dieser Rechnung erhellet aus der Zusammensetzung der Verhältnisse folgendermaßen:

Conv.Thlr.	: Rhein. fl.	=	12 : 5
Rhein. fl.	: Louisd'or	=	1 : 9
Louisd'or	: fl.Cassenmz.	=	7 : 1
fl.Cass.mnz.	: Hann.Thlr.	=	2 : 3

also Conv.Thlr. : Hann.Thlr. = 12.1.7.2 : 5.9.1.3

also 1 Conv. Thlr. $= \frac{12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}$ Hannövr. Thlr.

folglich 200 Convent. Thlr. 200. $\frac{12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}$

118) Aufgabe. Eine Größe in zwey oder mehr Theile zu theilen, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben. Man sage, die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen verhält sich zur gegebenen Größe, wie jede einzelne Verhältnißzahl zum gesuchten Theil, oder kürzer, man theile die gegebene Größe durch die Summe der Verhältnißzahlen, und multiplicire den Quotienten mit jeder einzelnen Verhältnißzahl.

119) Anmerkung. Wenn die Verhältnisse nicht in den kleinsten Zahlen gegeben sind, so bringe man sie zur Erleichterung der Rechnung auf die kleinsten Zahlen. Von der Anwendung, welche man von vorstehender Aufgabe häufig macht, hat dieselbe den Namen Gesellschaftsrechnung erhalten. z. B. Drey Kaufleute A, B, C legen 10000 fl. zusammen, und gewinnen damit 2400 fl. A hat 2000 fl. B 3000 fl. und C 5000 fl. gegeben, wie viel erhält jeder von dem Gewinnst nach Verhältniß seines Beytrags? Die Verhältnisse der Zahlen 2000 : 3000 : 5000 sind 2 : 3 : 5.

Man setze

$2 + 3 + 5 : 2400 = 2 :$ Antheil von A.
$2 + 3 + 5 : 2400 = 3 :$ — — B.
$2 + 3 + 5 : 2400 = 5 :$ — — C.

also erhält A $\frac{2400}{12} \cdot 2$ fl. $= 400$ fl.
B $\frac{2400}{12} \cdot 3$ fl. $= 600$ fl.
C $\frac{2400}{12} \cdot 5$ fl. $= 1000$ fl.

Weil der Quotient $\frac{2400}{12}$ in jedem Antheil vorkommt, so braucht man ihn nur einmal zu berechnen, und ihn mit den Zahlen 2, 3 und 5 zu multipliciren.

120) Anmerkung. Ganz einerley mit der Societätsrechnung ist die Aufgabe, eine Größe aus mehrern Theilen nach gegebenen Verhältnissen zusammenzusetzen. Z. B. Wie viel Salpeter, Kohlen und Schwefel sind zu einem Centner Pulver nöthig, wenn man zu 1 ℔ Pulver 24 Loth Salpeter, 6 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel braucht?

121) Anmerkung. Die Alligationsrechnung unterscheidet sich von der gewöhnlichen Vermischungs- oder Societätsrechnung nur dadurch, daß in ihr das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß. z. B. Man will Wein, die Maaß zu 1 Thlr. mit Wein, die Maaß zu 48 kr. so vermischen, daß man die Maaß für 1 fl. geben kann, wie viel muß von jedem genommen werden? Man suche den Unterschied der Preise zwischen der Mischung und dem bessern, und zwischen dem schlechtern Wein und der Mischung, und nehme das umgekehrte Verhältniß dieser Unterschiede für das Verhältniß der Zusammensetzung an:

$$90 \quad — \quad 60 \quad — \quad 48$$
$$90 - 60 = 30, \quad 60 - 48 = 12.$$

Man nehme 12 Theile Wein zu einem Thaler gegen 30 Theile Wein zu 48 kr. Die Richtigkeit dieses

Verfahrens erhellet von selbst, wenn der Preis der Mischung gerade in der Mitte zwischen den Preisen der zu mischenden Sorten liegt, da man von jeder Sorte gleich viel nehmen muß. Auch erhellet, daß man von derjenigen Sorte am meisten nehmen müsse, welcher der Preis der Mischung am nächsten kommt. Allgemein muß man von der besten Sorte so viel gegen die schlechtere nehmen, daß die Produkte aus den Unterschieden zwischen den Preisen der bessern Sorte und der Mischung, der Mischung und der schlechtern Sorte, in die Menge der bessern und der schlechtern Sorte gleich werden, weil blos unter dieser Bedingung die Preise der gemischten Sorten gleich viel über und unter den Werth der Mischung fallen. Diese Bedingung wird aber dadurch erfüllt, daß man das Verhältniß der Mengen dem umgekehrten Verhältnisse der Unterschiede der Preise gleich setzt. Im obigen Beyspiel:

30 : 12 Verhältn. der Unterschiede.
12 : 30 Verhältn. der Mengen.

$$12 \cdot 30 = 30 \cdot 12.$$

Daher giebt

$$12 \cdot 90 = 12 \cdot 60 + 12 \cdot 30,$$

der Werth der bessern Sorte, verbunden mit dem Werthe der schlechtern Sorte

$$= 30 \cdot 48 = 30 \cdot 60 - 30 \cdot 12$$

für den Werth der Mischung

$$12 \cdot 60 + 30 \cdot 60$$

folglich den Preis eines jeden Theiles der Mischung $= 60$ wie gehörig.

VI. Abschnitt.

Von der arithmetischen und geometrischen Reihe und deren Anwendung auf die Lehre von den Logarithmen.

122) Erklärung. Jede Folge von Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetz entstehen, heißt in der Mathematik eine Reihe. Eine dieser Zahlen heißt ein Glied der Reihe. Vorzüglich merkwürdig sind die arithmetische und geometrische Reihe.

In jener entstehen die nachfolgenden Glieder aus den vorhergehenden durch Addition oder Subtraction einer und derselben Zahl des Unterschieds der Reihe; in dieser entstehen die nachfolgenden Glieder durch die Multiplication der vorhergehenden mit derselben Zahl, dem Exponenten der Reihe.

Beyspiel einer arithmetischen Reihe:

0 2 4 6 8 10 12 14 . . . .

Unterschied = 2.

Beyspiel einer geometrischen Reihe:

1 3 9 27 81 . . . . . .

Exponenten = 3.

123) Anmerkung. Eine Reihe heißt steigend, wenn die nachfolgenden Glieder größer sind als die vorhergehenden, fallend, wenn es sich umgekehrt verhält. Man bekommt eine fallende Reihe, wenn man die steigende rückwärts liefet. z. B.

14 12 10 8 6 4 2 0 −2 −4 −6 −8 −10 . . . .

eine fallende arithmetische Reihe.

81 27 9 3 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{27}$ . . . . . .

eine fallende geometrische Reihe.

In der fallenden arithmetischen Reihe entstehen die folgenden Glieder aus den vorhergehenden durch die

Subtraction des Unterschieds. Wenn das vorhergehende Glied bis auf o abgenommen hat, und man die Reihe jenseits dieser Gränze fortsetzen will, so werden die folgenden Glieder verneint; d. i. solche Zahlen, welche sich mit gleich großen diesseits der o befindlichen Zahlen aufheben und o geben, oder überall abgezogen werden müssen, wo die bejahten wirklichen Größen addirt werden, und umgekehrt. Die bejahten und verneinten Zahlen verhalten sich wie Vermögen und Schulden. Man begreift sie zusammen unter dem Namen der entgegengesetzten Größen. Die allgemeine Betrachtung derselben gehört für die höhere Rechenkunst.

In der fallenden geometrischen Reihe entstehen die folgenden Glieder aus den vorhergehenden durch die Multiplication des Exponenten, der hier ein eigentlicher Bruch ist, dessen Zähler 1 und der Nenner der Exponent der umgekehrten steigenden Reihe ist. In dem obigen Beyspiel ist der Exponent der fallenden geometrischen Reihe $\frac{1}{2}$. Die Glieder der fallenden geometrischen Reihe können nie o werden, ob sie gleich kleinere und immer kleinere Brüche sind.

124) Satz. Eine steigende arithmetische Reihe durch den Unterschied und das erste Glied der Reihe auszudrücken, setze man den Unterschied mit dem Zeichen + zu jedem vorhergehenden Glied um das folgende zu finden. Wenn das erste Glied 1 der Unterschied 2 ist, so giebt dieß für die Reihe

1 3 5 7 9
1 1+2 1+2+2 1+2+2+2 1+2+2+2+2.....

oder

1 1+2 1+2.2 1+3.2 1+4.2.

Diesen Ausdruck der steigenden arithmetischen Reihe allgemein darzustellen, nenne man das erste

Glied a, den Unterschied d, so erhält man für die steigende arithmetische Reihe

A) a a+d a+2d a+3d a+4d .....

Auf eine ähnliche Weise kann man die fallende arithmetische Reihe durch das erste Glied und den Unterschied ausdrücken, wenn man den Unterschied von jedem vorhergehenden Glied abzieht, oder ihn mit dem Zeichen — dazu setzt, um das folgende zu erhalten. Die obige Reihe umgekehrt würde auf diese Weise so geschrieben werden,

9 9−2 9−2−2 9−2−2−2 9−2−2−2−2.....

oder:

9 9−2 9−2.2 9−3.2 9−4.2 .....

Heißt man das erste Glied der fallenden arithmetischen Reihe allgemein a, den Unterschied d, so erhält man

B) a a−d a−2d a−3d a−4d .....

für den allgemeinen Ausdruck der fallenden arithmetischen Reihe. Vergleicht man beyde allgemeine Ausdrücke für die fallende und für die steigende arithmetische Reihe mit einander, so erhellet, daß sie sich nur dadurch von einander unterscheiden, daß bey der steigenden Reihe d mit dem Zeichen +, bey der fallenden Reihe mit dem Zeichen — zu a gesetzt wird.

Wenn man daher in dem letzten Fall d als eine verneinte Größe betrachtet, so gilt der Ausdruck A) auch für fallende arithmetische Reihen.

125) Satz. In jeder arithmetischen Reihe besteht jedes Glied aus dem ersten Gliede und dem Unterschied so viel Mal genommen, als um wie viel Glieder das bestimmte Glied von dem ersten entfernt ist. Denn jedes folgende Glied entsteht aus dem vorhergehenden durch die Addition des Unterschieds, folglich entstehen sie alle aus dem ersten Glied und dem Unterschiede so

vielmal

viel Mal genommen, als um wie viel Glieder das gesuchte Glied von dem ersten absteht. Man schreibe unter die Reihe A die Reihe der natürlichen Zahlen,

a a+d a+2d a+3d a+4d a+5d ..... A)

1 2 3 4 5 6 ..... C)

so zeigen die Zahlen der untern Reihe an, das wie vielte Glied ein jedes Glied in der obern Reihe ist, wenn a das erste Glied ist. Es erhellet, daß jedes Glied der Reihe A) aus dem ersten Gliede und dem Unterschiede so viel Mal genommen besteht, als die Zahl des Glieds weniger eins beträgt. Dieses giebt ein Mittel an die Hand, jedes Glied einer arithmetischen Reihe zu finden, wenn das erste Glied und der Unterschied der Reihe gegeben sind. z. B. Man soll die hundertste ungerade Zahl finden, d. i. man soll das 100ste Glied der Reihe 1, 3, 5 ..... finden. Das erste Glied ist = 1 der Unterschied = 2, das gesuchte Glied = 1 + 99 . 2 = 199.

125) Satz. In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe der äußern Glieder so groß als die Summe je zweyer Glieder, welche von den äussern gleich weit abstehen. Denn jedes Glied der arithmetischen Reihe ist um so viel Unterschiede größer als das erste, um wie viel Glieder es von diesem absteht, und um so viel Unterschiede kleiner als das letzte Glied, um wie viel Glieder es von demselben absteht. Daher muß die Summe solcher Glieder, welche gleich weit von dem ersten und letzten Gliede abstehen, so groß als die Summe des ersten und letzten Gliedes seyn. z. B.

a a+d a+2d a+3d a+4d a+5d

a+(a+5d)=(a+d)+(a+4d)=(a+2d)+(a+3d)

Hierauf gründet sich die folgende Aufgabe.

127) Aufgabe. Die Summe einer bestimmten Anzahl von Gliedern einer arithmetischen Reihe zu finden. Man schreibe die zu summirende Reihe rückwärts unter sich selbst, wie in folgendem Beyspiel:

1 3 5 7 9 11 13 15
15 13 11 9 7 5 3 1

Die Summe je zweyer unter einander stehenden Glieder sind vermöge des vorhergehenden Satzes einander gleich. Man findet daher die Summe aller Glieder der doppelten Reihe, wenn man die Summe irgend eines Paares von unter einander stehenden Gliedern etwa des ersten mit der Anzahl der Paare; d. i. mit der Anzahl der Glieder einer Reihe multiplicirt. Die Hälfte davon ist die Summe der gegebenen Glieder der Reihe. Man heiße diese Summe = S, so hat man in obigem Beyspiel

$$2S = (1+15) \cdot 8 \text{ und } S = \frac{(1+15) \cdot 8}{2} = 64$$

Hieraus fließt folgende Vorschrift für die Summirung der arithmetischen Reihe: Man addire das erste und letzte Glied, multiplicire die Summe durch die Anzahl der Glieder, und dividire, was herauskommt, durch zwey.

128) Anmerkung. Für die Summirung einer fallenden arithmetischen Reihe ist keine besondere Vorschrift nöthig, denn man nenne das erste Glied das letzte, und lese die Reihe rückwärts, so verwandelt sie sich in eine steigende.

Wenn man in dem Beyspiel des vorhergehenden Paragraphs von der Reihe der ungeraden Zahlen, zuerst zwey, dann drey, dann vier, fünf u. s. w. Glieder summiret, so erhält man die Reihe der Quadratzahlen. Dieß giebt ein Mittel, Quadrattafeln (78. Anmerkung) durch die bloße Addition zu berechnen.

Einige Beyspiele zur Summirung arithmetischer Reihen. Wie viel Ziegel sind zur Deckung eines dreyeckigten Daches nöthig, wenn in der Spitze 1 Ziegel ist, auf jeder folgenden Latte ein Ziegel mehr liegt, und der Latten 50 sind? Es erhellet, daß hier die Reihe der natürlichen Zahlen 1 2 3 4 5 . . . . bis zum 50ten Glied summirt werden muß. Das 50te Glied ist 50 selbst, folglich die Summe der Reihe $\frac{(1+50)\cdot 50}{2} = 51 \cdot 25 = 1275$ Ziegel.

Es spielet jemand auf einen bestimmten Auszug in einem Zahlenlotto, und besetzt das erste mal die Zahl mit zwey Kreutzer, das zweyte mal mit vier Kreutzer, und so fort jedes mal mit zwey Kreutzer mehr, in der 20ten Ziehung gewinnt er; es fragt sich, wie viel hat er gewonnen, und wie verhält sich der Einsatz zum Gewinnst? Ich nehme an, der bestimmte Auszug werde 60fach bezahlt. Die Einsätze sind Glieder der folgenden arithmetischen Reihe

2 4 6 8 . . . .

bis zum 20ten Glied, welches $= 2 + 19 \cdot 2 = 40$ ist. Dieses Glied mit 60 multiplicirt, giebt den Gewinnst $= 40 \cdot 60 = 2400$ kr. Der gesammte Einsatz ist die Summe von den 20 ersten Gliedern der Reihe $= \frac{(40+2)\,20}{2} = 420$ kr. Er verhält sich zum Gewinnst wie 7 : 40; d. i. der Einsatz wird nach zwanzig Ziehungen nicht mehr 6fach bezahlt, da er 60fach wäre bezahlt worden, wenn man in der ersten Ziehung gewonnen hätte. Nach 30 Ziehungen würde der Einsatz $= \frac{(60+2)\,30}{2} = 930$ kr., der Gewinnst $=$ 3600 kr. und das Verhältniß von beyden $= 93 : 360$ beynahe 1 : 4 seyn. Das Verhältniß des Gewinnstes zum Einsatz nimmt mit jeder Ziehung ab, und daher

wird der Einsatz endlich dem Gewinnste gleich werden (hier bey der 120ten Ziehung), und wenn man noch länger spielet, ihn übertreffen. Da nun die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen immer gleich bleibt, so erhellet hieraus, wie thöricht es ist, mit steigenden Einsätzen zu spielen.

129) Satz. Der allgemeine Ausdruck für jede geometrische Reihe, wenn man das erste Glied a, den Exponenten e heißt, ist folgender:

A) $a \; e.a \; e^2.a \; e^3.a \; e^4.a \; e^5.a \ldots\ldots$

Hier können e und a jede ganze Zahl und jeden Bruch bedeuten. z. B. $a = 2$, $e = 3$, so entsteht folgende geometrische Reihe,

$2 \quad 3.2 \quad 3^2.2 \quad 3^3.2 \quad 3^4.2 \ldots\ldots$
$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 172 \ldots\ldots$

Wenn das erste Glied der geometrischen Reihe oder $a = 1$ ist, so verwandelt sich der allgemeine Ausdruck für die geometrische Reihe in folgenden,

B) $1 \; e \; e^2 \; e^3 \; e^4 \; e^5 \; e^6 \ldots\ldots$

wo die Glieder der Reihe lauter Potenzen des Exponenten sind. Es sey z. B. $e = 2$, so giebt dieß folgende Reihe,

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \ldots\ldots$

oder $e = \frac{1}{3}$, so hat man

$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81} \ldots\ldots$

Die geometrischen Reihen, deren erstes Glied 1 ist, sind wegen ihrer Anwendung auf die Lehre von den Logarithmen vorzüglich merkwürdig. Ueberhaupt kann man jede geometrische Reihe, deren erstes Glied nicht 1 ist, in eine verwandeln, deren erstes Glied 1 ist, wenn man alle Glieder jener Reihe durch das erste Glied dividirt. Denn der allgemeine Ausdruck B) entsteht aus dem allgemeinen Ausdruck A), wenn man alle Glieder dieses letztern durch a dividirt.

130) **Aufgabe.** In einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied und Exponent gegeben sind, jedes der folgenden Glieder zu finden. Man schreibe unter den allgemeinen Ausdruck der geometrischen Reihe A) die Reihe der natürlichen Zahlen,

$$a \quad ea \quad e^2a \quad e^3a \quad e^4a \ldots\ldots$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots\ldots$$

so erhellet, daß jedes Glied der geometrischen Reihe ein Produkt des ersten Glieds in diejenige Potenz des Exponenten ist, welche durch die Zahl der Glieder weniger eins ausgedrückt wird. z. B. Das 3te Glied $e^2 a$, das 5te Glied $e^4 a$ u. s. w. Man sucht das 8te Glied der Reihe,

$$1 \quad 2 \quad 4 \ldots\ldots$$

Hier ist das erste Glied $= 1$, der Exponent $= 2$, also das achte Glied $= 1 . 2^7 = 2^7 = 2.2.2.2.2.2.2 = 128$.

131) **Aufgabe.** Die Summe einer bestimmten Anzahl von Gliedern einer geometrischen Reihe zu finden. Es mag hinreichend seyn, die Auflösung dieser Aufgabe an einem Exempel zu erläutern:

$$2 = e$$

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 172 = S.$$

Die Summe der fünf Glieder dieser Reihe heiße S. Man multiplicire jedes Glied mit dem Exponenten 3, so erhält man

$$3S = 6, 18, 54, 172, 516$$

abgezogen $S = 2, 6, 18, 54, 172,$

giebt $3S - S = 516 - 2$

oder $(3-1) . S = 516 - 2$

also $$S = \frac{516 - 2}{3 - 1}$$

jener Reihe ist der Unterschied, in dieser der Exponent des Verhältnisses zwischen zwey nächsten Gliedern immer derselbe. Z. B.

1 3 5 7 9 11 . . . .

1 — 3 = 3 — 5 = 5 — 7 = 7 — 9 u. s. w.

1 2 4 8 16 32 64 . .

1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 u. s. w.

Ich nenne der Kürze wegen das Verhältniß zwischen zwey nächsten Gliedern der arithmetischen Reihe, das arithmetische Verhältniß der Reihe, das Verhältniß zwischen zwey nächsten Gliedern der geometrischen Reihe, das geometrische Verhältniß der Reihe.

134) Satz. Das Verhältniß von je zwey Gliedern in der arithmetischen sowohl, wie in der geometrischen Reihe, ist aus so viel Verhältnissen der Reihe zusammengesetzt, als zwischen den beyden Gliedern Verhältnisse der Reihe enthalten sind; z. B. in der arithmetischen Reihe ist in dem Verhältniß 3 — 7 der Unterschied 4 dem doppelten Unterschiede der Reihe 2 gleich; es ist daher auch das Verhältniß 3 — 7 dem doppelten Verhältniß der Reihe gleich, es besteht nämlich aus den beyden Verhältnissen 3 — 5 und 5 — 7, wovon jedes = 1 — 3 ist.

In der geometrischen Reihe ist der Exponent des Verhältnisses 2 : 16 gleich der 3ten Potenz des Exponenten der Reihe. Denn es entsteht jedes folgende Glied der Reihe aus dem vorhergehenden durch die Multiplication mit dem Exponenten der Reihe: nun ist aber 16 um 3 Glieder von 2 entfernt, folglich entsteht es aus 2, wenn man dieß Glied der Reihe dreymal mit dem Exponenten, das ist mit der dritten Potenz des Exponenten multipliciret. Daher ist das Verhältniß 2 : 16 vermöge (110) dem dreyfachen Verhältniß 2 : 4 gleich, oder welches einerley ist, aus den drey gleichen

Verhältnissen 2 : 4, 4 : 8 und 8 : 16 zusammengesetzt. Hieraus fließet, daß 4 Glieder, wovon je zwey gleich weit von einander abstehen, in der arithmetischen Reihe arithmetisch, in der geometrischen Reihe geometrisch proportional sind. Denn das Verhältniß je zweyer Glieder, welche gleich weit von einander abstehen, ist von gleich vielen und gleich großen Verhältnissen der Reihe zusammengesetzt. Z. B.

4 : 16 = 16 : 64 in der geometrischen Reihe

1 — 5 = 7 — 11 in der arithmetischen Reihe.

Im Gegentheil, Glieder, welche nicht gleich weit von einander abstehen, bilden ungleiche Verhältnisse, denn sie sind aus einer ungleichen Anzahl gleicher Verhältnisse zusammengesetzt.

135) Anmerkung. Man schreibe unter eine geometrische Reihe, deren erstes Glied 1 ist, die Reihe der natürlichen Zahlen von 0 an, so daß 0 unter das erste Glied der geometrischen Reihe, 1 unter das zweyte kommt, und so weiter, so nennt man diese Verbindung ein logarithmisches System. Z. B.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	.	.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	.	.

Die Glieder der geometrischen Reihe heißen die Zahlen (numeri) die Glieder der arithmetischen die Logarithmen (Verhältnißzähler) dieser Zahlen. Im vorstehenden logarithmischen System ist 3 der Logarithme von 8, 5 der Logarithme von 32. Man schreibt dieß 3 = log. 8, 5 = log. 32.

136) Anmerkung. Je nachdem man mit der Reihe der natürlichen Zahlen eine andere geometrische Reihe verbindet, erhält man ein anderes logarithmisches System, es giebt also der logarithmischen Systeme unzählig viele. Vorzüglich merkwürdig, wegen seines häufigen und bequemen Gebrauchs, ist das folgende:

1	10	100	1000	10000 . . . .
0	1	2	3	4 . . . .

Es heißt von seinem Erfinder das Briggische, oder auch das gemeine logarithmische System. Da in jedem logarithmischen System die Reihe der natürlichen Zahlen dieselbe, und das erste Glied der geometrischen Reihe immer 1 bleibt, so erhellet, daß das ganze logarithmische System durch das zweyte Glied der geometrischen Reihe, welches dem Exponenten gleich ist, bestimmt wird. Man nennt daher das Verhältniß des ersten Gliedes zum zweyten Gliede der geometrischen Reihe das Grundverhältniß oder die Basis des logarithmischen Systems. So ist 1 : 10 die Basis des gemeinen logarithmischen Systems.

137) Anmerkung. Der Name Logarithme oder Verhältnißzähler rechtfertigt sich dadurch: das Verhältniß irgend eines Gliedes der geometrischen Reihe zu 1 ist aus so vielen Grundverhältnissen zusammengesetzt, als der Logarithme des Gliedes Einheiten enthält; z. B. im gemeinen System ist das Verhältniß 1 : 1000 = dem dreyfachen Verhältniß 1 : 10, und log. 1000 = 3. Die Allgemeingültigkeit dieses Satzes erhellet daraus: der Logarithme jeden Gliedes der geometrischen Reihe zeigt an, wie viel Verhältnisse der Reihe zwischen ihm und dem ersten Gliede oder 1 enthalten sind, folglich fließt der Satz aus (134), weil alle Verhältnisse der Reihe untereinander und dem Grundverhältnisse gleich sind. Die folgenden Lehrsätze, auf welche sich der Gebrauch der Logarithmen gründet, werde ich der Kürze wegen an dem §. 135. erwähnten logarithmischen System, weil sich dieses in den kleinsten ganzen Zahlen ausdrücken läßt, erläutern: ich erinnere aber im voraus, daß sich diese Sätze auf kein besonderes logarithmisches System einschränken, sondern für alle gelten.

138) Satz. Wenn vier Zahlen eines logarithmischen Systems geometrisch proportional sind, so sind ihre Logarithmen arithmetisch proportional. Denn die Zahlen sind geometrisch proportional, wenn es solche Glieder der geometrischen Reihe sind, welche gleich weit von einander abstehen (134). Alsdann stehen aber ihre Logarithmen in der arithmetischen Reihe ebenfalls gleich weit voneinander ab, und sind daher arithmetisch proportional. z. B. in dem logarithmischen System (135) ist

$$2 : 8 = 16 : 64$$

und die Logarithmen

$$1 - 3 = 4 - 6$$

139) Satz. Der Logarithme des Produktes zweyer Zahlen ist der Summe der Logarithmen der Factoren gleich. Dieß erhellet daraus: jedes Produkt kann man als das 4te Glied einer geometrischen Proportion, wovon 1 das erste Glied, und die beyden Factoren die mittlern Glieder sind, ansehen. Man suche zu diesen Gliedern der geometrischen Proportion die zugehörige Logarithmen, so sind sie vermöge des vorhergehenden Paragraphs in arithmetischer Proportion, also das 4te Glied derselben oder der Logarithme des Produkts gleich der Summe der mittlern Glieder, weniger dem ersten Gliede (94). Die mittlern Glieder sind die Logarithmen der Factoren, und das erste Glied ist $= 0$, weil der Logarithme von 1 in jedem logarithmischen System 0 ist. Beyspiel:

$8 \cdot 32 = 256$, also in dem logarithmischen System. (135.)

$$1 : 8 = 32 : 256$$
$$0 - 3 = 5 - 8$$

daher 8 oder $\log. 256 = 5 + 3 = \log. 32 + \log. 8.$

140) Satz. Der Logarithme eines Quotienten ist dem Unterschiede der Logarithmen des Dividenden und des Divisors gleich. Jeder Quotient kann als die 4te geometrische Proportionalzahl zu dem Divisor der Einheit und dem Dividenden angesehen werden, also der Logarithme des Quotienten als die 4te arithmetische Proportionalzahl zu den Logarithmen des Divisors der Einheit und des Dividenden. Er ist daher (94. 139.) den Logarithmen des Dividenden weniger dem Logarithmen des Divisors gleich. Beyspiel:

$$8 = \frac{256}{32}$$

daher

$$32 : 1 = 256 : 8$$
$$5 - 0 = 8 - 3$$

und 3 oder $\log. 8 = 8 - 5 = \log. 256 - \log. 32.$

141) Anmerkung. Aus den beyden vorhergehenden Paragraphen erhellet, wie man vermittelst der Logarithmen die Multiplication in eine Addition, und die Division in eine Subtraction verwandeln könne, unter der Voraussetzung, daß es ein logarithmisches System gebe, worinn alle ganze und gebrochene Zahlen vorkommen. Das §. 136. angeführte Briggische System, wonach die gewöhnlichen Tafeln berechnet sind, enthält nur die Logmarithmen von 1 10 und den Potenzen von 10, demungeachtet findet man in den kleinern Tafeln die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000, und in den größern Tafeln von 1 bis 100000 und darüber; es fragt sich, wie sind die Logarithmen der Zahlen, welche nicht in der oben angeführten Reihe vorkommen, gefunden worden? Dieß zu erläutern, diene folgendes:

In dem Briggischen System

A)	1	10	100	1000	- - - - - -
B)	0	1	2	3	- - - - - -

suche man zwischen je zwey nächsten Gliedern der obern Reihe die mittlere geometrische, der untern Reihe die mittlere arithmetische Proportionalzahl, so erhält man folgendes:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & \sqrt{1.10}, & 10, & \sqrt{10.100}, & 100, & \sqrt{100.1000}, & 1000 \ldots \\ 0 & 0,5 & 1 & 1,5 & 2 & 2,5 & 3 \ldots \end{array}$$

Durch die eingeschobenen Glieder (so heißen die mittleren Proportionalzahlen) wird das Verhältniß der Reihe zwischen den Gliedern der Hauptreihen A und B halbiret, und jede Reihe erhält noch einmal so viel Glieder. Die eingeschobenen Glieder der geometrischen Reihe sind lauter Irrational-Quadratwurzeln (77). Die eingeschobenen Glieder der arithmetischen Reihe sind lauter Brüche. Man drückt beyde in Decimalbrüchen aus. Man kann dieses Einschieben von Gliedern in beyden Reihen so oft wiederholen als man will, und dadurch die nächsten Glieder in beyden Reihen einander immer näher bringen. Vorausgesetzt, dieß sey geschehen, so erhellet, daß sich unter den unzählig vielen eingeschobenen Gliedern der obern Reihe auch solche Irrationalwurzeln befinden müssen, welche den zwischen die Glieder der Hauptreihe fallenden ganzen Zahlen so nahe kommen, daß man sie ohne merklichen Fehler dafür annehmen kann. Sucht man solche Glieder unter den unzählig vielen andern der geometrischen Reihe heraus, welche ganze Zahlen sind oder ganzen Zahlen sehr nahe kommen, und nimmt die ihnen zugehörigen Glieder der arithmetischen Reihe als ihre Logarithmen dazu, so erhält man logarithmische Tafeln für alle ganze Zahlen, so weit man diese Berechnung fortsetzen will.

Von den eingeschobenen Gliedern muß eben das gelten, was in den vorhergehenden Paragraphen von den Gliedern der Hauptreihe erwiesen worden ist, weil sich der Beweis bloß auf die Natur der geometrischen

und arithmetischen Reihe, und ihre Verbindung zu einem logarithmischen System gründet, welche durch die Einschiebung von mittlern Proportionalzahlen nicht aufgehoben wird.

142) Anmerkung. Zum Gebrauch für Anfänger sind die kleinen Vlacqischen oder Wolfischen Tafeln völlig hinreichend. Von den erstern ist insbesondere die neue von Ebert besorgte Ausgabe, Frankfurt am Mayn bey J. G. Fleischer 1790. sehr zu empfehlen. Diese Tafeln enthalten die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000 auf sieben Decimalstellen berechnet. Ich werde mich in dem Folgenden bloß auf den Gebrauch dieser kleinern Tafeln einschränken. Vorzüglicher und in den meisten Fällen auch für geübtere Mathematiker völlig befriedigend sind die beyden 8vo Ausgaben der Vegaischen Tafeln, welche die Logarithmen bis 100499 enthalten. Noch größere Tafeln, wie die größern Vlacqischen und Vegaischen, sind, ausser einigen astronomischen Berechnungen, selten erforderlich.

Gebrauch und Anwendung der logarithmischen Tafeln.

143) Satz. Die Logarithmen aller ganzen Zahlen zwischen 1 und 10 sind größer als 0 und kleiner als 1, also eigentliche Brüche, welche die Tafeln als Decimalbrüche angeben. Alle Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 sind uneigentliche Brüche, größer als 1 und kleiner als 2, alle Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 sind größer als 2 und kleiner als 3 u. s. w. Die Stelle der Ganzen heißt bey den Decimalbrüchen, worinn die Logarithmen ausgedrückt sind, die Kennziffer. Denn sie zeigt an, zwischen welche Glieder der Hauptreihe der Logarithme fällt. z. B. die Kennziffer 1 von einem Logarithmen zeigt an,

daß die zugehörige Zahl ein Zehner ist, der zwischen 10 und 100 fällt, die Kennziffer 2, daß die Zahl ein Hunderter ist u. s. w. Die kleinern Tafeln gehen nur zur Kennziffer 4. Der Decimalbruch hinter der Kennziffer eines Logarithmen heißt die Zugabe oder Mantisse.

144) Aufgabe. Den zu einer Zahl gehörigen Logarithmen zu finden.

1ter Fall. Wenn die Zahl innerhalb den Gränzen der Tafeln liegt. Man suche dieselbe unter der Columne N. so steht der Logarithme daneben.

2ter Fall, wenn die Zahl ausserhalb den Gränzen der Tafeln liegt, aber in Factoren zerfällt werden kann, welche in den Tafeln enthalten sind. Man suche die Logarithmen dieser Factoren und summire sie, so erhält man den Logarithmen der Zahl (139). Beyspiel:

log. 68000 = log. 68 + log. 1000 =
log. 1000 = 3 . 0000000
log. 68 = 1 . 8325089
log. 68000 = 4 . 8325089

3ter Fall. Wenn die Zahl nicht in den Tafeln enthalten ist, und sich auch nicht in solche Factoren zerfällen läßt, die darinn enthalten sind. Man schneide von der gegebenen Zahl so viel Ziffern ab, bis man den Rest in den Tafeln findet, suche den Logarithmen dieses Restes auf, und vergrößere seine Kennziffer um so viel Einheiten, als man Ziffern von der Zahl abgeschnitten hat. Durch dieses Verfahren erhält man eigentlich den Logarithmen von der Zahl, wenn man hinter den Rest so viel Nullen schreibt, als Ziffern abgeschnitten worden sind. Beyspiel:

den log. 7346|23 zu finden.
log. 7346 = 3 . 8660509
log. 100 = + 2.
log. 734600 = 5 . 8660509

Der gefundene Logarithme ist etwas kleiner, als der gesuchte. Man findet diesen genauer folgender Gestalt. Die Zahl 734623 fällt zwischen die beyden Zahlen

734600
734700

also auch der gesuchte Logarithme zwischen die Logarithmen der beyden Zahlen, welche man genau durch die Tafeln finden kann. Setzt man voraus, der Unterschied der Logarithmen verhalte sich wie der Unterschied der Zahlen, so findet man durch folgende Proportion den Unterschied des gesuchten Logarithmen und eines der beyden gegebenen

(100 : 23 / Unterschied der Zahlen) = log. 734600 − log. 734700 : gesuchten Unterschied.

Diesen Unterschied addire man zu den Logarithmen der kleinern Zahl, so erhält man den Logarithmen der gesuchten Zahl:

log. 734600 — log. 734700 =
log. 7346 — log. 7347, denn die beyden Nullen hinter diesen Zahlen vermehren bloß die Kennziffer um 2.

Die Rechnung wird so geführt;

log. 7346 = 3 . 8660509
log. 7347 = 3 : 8661100
9409
100 : 23 = 9409 : 2164
log. 734600 = 5.8660509
+ 2164
log. 734623 = 5.8662673

Man nennt dieses Verfahren das Finden der Logarithmen durch Proportionaltheile. Man darf es nicht über zwey bis drey Ziffern jenseits der Gränzen der Tafeln

Tafeln ausdehnen, weil die Voraussetzung, daß sich die Unterschiede der Logarithmen wie die Unterschiede der Zahlen verhalten, nur bey kleinern Unterschieden wahr ist.

145) Aufgabe. Zu einem gegebenen Logarithmen die Zahl zu finden.

1ter Fall, wenn der Logarithme innerhalb den Gränzen der Tafeln liegt. Er ist entweder unmittelbar darinn enthalten und die Zahl daneben, oder er fällt zwischen zwey nächste Logarithmen der Tafeln. Der letzte Fall zeigt an, daß die gesuchte Zahl zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen fällt. Man nimmt gewöhnlich die nächst kleinere dafür an.

Z. B. die zum log. 2.3645721 gehörige Zahl zu finden. Dieser Logarithme fällt zwischen die beyden

2.3636120 = log. 231
2.3654880 = log. 232

Logarithmen der Tafel. Die nächst kleinere Zahl ist also 231. Wenn man die Kennziffer des gegebenen Logarithmen um eine oder etliche Einheiten vermehren kann, ohne daß sie die Gränzen der Tafeln überschreitet, so findet man von der gesuchten Zahl noch so viel Decimalstellen, als man die Kennziffer um Einheiten vermehrt hat. Im vorigen Beyspiel:

log. der gesuchten Zahl = 2.3645721
log. 10 = 1

log. der 10fachen Zahl = 3.3645721

Dieser Logarithme fällt zwischen

3.3645510 = log. 2315
3.3647386 = log. 2316

also die gesuchte Zahl zwischen 231, 5 und 231, 6. Die erste kommt am nächsten.

2ter Fall. Wenn der gegebene Logarithme außerhalb den Gränzen der Tafeln liegt. Man vermindere

die Kennziffer desselben so viel, daß man sie in den Tafeln findet, und suche den Logarithmen unter der verminderten Kennziffer, an die nebenstehende Zahl hänge man so viel Nullen, als man Einheiten von der Kennziffer weggenommen hat.

Z. B. log. 5. 6231487 unter der Kennziffer 3 aufgesucht, giebt 419900. Wenn der Logarithme, wie in diesem Beyspiel nicht genau in den Tafeln enthalten ist, so zeigt dieß an, daß die gesuchte Zahl eigentlich zwischen die zu den nächsten Logarithmen der Tafeln gehörige Zahlen, wenn man jede um so viel Nullen vermehret, als Einheiten von der Kennziffer abgeschnitten worden sind, fällt. Hier fällt der Logarithme zwischen

log. 419900 = 5. 6231459
log. 420000 = 5. 6232493

Man kann die beyden letzten Stellen der gesuchten Zahlen durch Proportionaltheile genauer finden, wenn man das Verfahren (144) umkehret.

1034 : 28 = 100 : 3
Unterſch. der Log. Unterſch. der Zahlen.

also die gesuchte Zahl genauer 419903.

146) Aufgabe. Den Logarithmen eines Bruches zu finden. Man betrachte den Bruch als einen Quotienten, dessen Zähler der Dividend, der Nenner der Divisor ist (49), so erhält man den Logarithmen des Bruches, wenn man von dem Logarithmen des Zählers den Logarithmen des Nenners abzieht. Ist der Bruch ein ächter, so ist der Logarithme des Nenners, welcher abgezogen werden soll, größer, als der Logarithme des Zählers, von dem der Abzug geschehen soll, es bleibt also von dem abzuziehenden Logarithmen etwas übrig, d. i. der Logarithme eines ächten Bruches ist eine verneinte Zahl. Beyspiel:

$$\log. \tfrac{3}{4} = \log. 3 - \log. 4.$$
$$\log. 3 = 0.4771213$$
$$\log. 4 = 0.6020600$$

den obern vom untern weggenommen, läßt $-0.1249387 = \log. \frac{3}{4}$. Man kann die Rechnung mit verneinten Logarithmen vermeiden, wenn man zur Kennziffer des kleinern Logarithmen so viel Einheiten lehnt, bis der größere von ihm abgezogen werden kann, (gewöhnlich lehnt man so viel, daß die Kennziffer des Restes 3 beträgt, also in den Tafeln aufgesucht werden kann), und das, was man gelehnt hat, mit dem Zeichen — hinten anmerkt. Das obige Beyspiel sähe so aus:

$$\log. 3 = 0.4771213$$
$$+ 4.$$
$$\log. 4 = 0.6020600$$
$$\log. \tfrac{3}{4} = 3.8750613 - 4.$$

Wollte man die zu einem solchen Logarithmen gehörige Zahl aus den Tafeln finden, so suche man den Logarithmen ohne die abzuziehende Größe auf, und schneide von der zugehörigen Zahl so viel Decimalstellen ab, als die abzuziehende Größe Einheiten enthält. Denn $3.8750613 = \log. 7500$
$4. = \log. 10000$
also $3.875013 - 4 = \log. 7500 - \log. 10000 = \log. \frac{7500}{10000} = \log. 0{,}75$, wie gehörig, weil $0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Daß die Logarithmen eigentlicher Brüche verneinte Zahlen sind, kann man auch so darthun. Man setze die arithmetische und geometrische Reihe irgend eines logarithmischen Systems rückwärts fort, so geben die Glieder der geometrischen Reihe eigentliche Brüche, die Glieder der arithmetischen verneinte Zahlen. Z. B. in dem Briggischen System erhält man lauter Decimalbrüche und ihre Logarithmen

0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
— 3	— 2	— 1	0	1	2	3

Es erhellet hieraus, daß jeder Bruch, dessen Zähler 1 ist, zu seinem Logarithmen den Logarithmen des Nenners verneint genommen hat.

147) Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden. Man addire die Logarithmen der beyden mittlern Glieder, und ziehe den Logarithmen des ersten Gliedes ab, so erhält man den Logarithmen des vierten Gliedes.

Hieraus erhellet, wie man vermittelst der Logarithmen alle Exempel der Regel de Tri berechnen könne. Beyspiel:

Wenn das griechische oder olympische Stadium 95 $\frac{1}{9}$ französische Toisen betrug (s. Rome de L'Isle Metrologie S. 25. der deutsch. Uebers. von Große) wieviel Toisen machen 100 Stadium?

$$1 : 95\tfrac{1}{9} = 100 : \text{Ges.}$$
$$1 : \frac{856}{9} = 100 : \text{Ges.}$$
$$\log. 100 = 2.$$
$$\log. 856 = 2.9324738$$
$$4.9324738$$
$$\text{abgezogen } \log. 9 = 0.9542425$$
$$\log. 9511 = 3.9782313$$

148) Aufgabe. Den Logarithmen einer Potenz zu finden. Man suche den Logarithmen der Wurzel und multiplicire denselben mit dem Grad der Potenz. Denn da jede Potenz aus dem Produkte so viel gleicher Factoren besteht, als ihr Grad anzeigt, so ist der Logarithme der Potenz die Summe der Logarithmen der Factoren, weil aber diese Logarithmen alle gleich sind, so erhält man die Summe, wenn man den Logarithmen eines Factors mit der Anzahl der Factoren, d. i., mit dem Grad der Potenz multipliciret. Beyspiel:

$\log. 4^2 = 2. \log. 4$; $\log. 16^3 = 3. \log. 16.$
$\log. 2^{12} = 12 \log. 2.$ u. s. w.

149) Satz. Aus dem vorhergehenden Satz folgt, daß man den Logarithmen der Wurzel einer Potenz findet, wenn man den Logarithmen der Potenz durch ihren Grad dividiret.

Die Ausziehung der Quadratwurzel verwandelt sich also durch die Logarithmen in eine Division mit 2, die Ausziehung der Cubikwurzel in eine Division mit 3 u. s. w.

Einige Beyspiele.

$\sqrt{3}$ durch Logarithmen zu berechnen.

$\log. 3 = 0.4771213$
halbiret 0.2385606

und unter der Kennziffer 3 aufgesucht, giebt 1,732 für die Wurzel.

$\sqrt[3]{2}$ zu finden

$\log. 2 = 0.3010300$
hiervon $\frac{1}{3}$ giebt 0.1003433

unter der Kennziffer 3 fällt die Wurzel zwischen 1,260 und 1,259, wovon die erste Zahl am nächsten kommt.

4096 ist eine Potenz der 2, man fragt, die wievielste? Die unbestimmte Zahl der Potenz heiße n (numerus), so hat man $2^n = 4096$, also $\log. 2^n = \log. 4069$, aber $\log. 2^n = n$ mal $\log. 2$ (148.) daher $n \log. 2 = \log. 4096$; folglich n oder der gesuchte Grad der Potenz $= \frac{\log. 4096}{\log. 2}$. Hier müssen zwey Logarithmen in einander dividirt werden, man verfährt dabey nach den Regeln der Division mit Decimalbrüchen.

$\frac{\log. 4096}{\log. 2} = \frac{3.6123599}{0.3010300} = 12 = n.$

Diese Aufgabe kann ohne Logarithmen gar nicht allgemein aufgelöst werden. Sie zeigt zugleich, welchen Vortheil es bringt, für eine gesuchte Größe einen Buchstaben (allgemeines Zeichen) zu setzen. Man kann alsdann mit der unbekannten Größe rechnen, als wenn sie bekannt wäre, und sie aus ihren Verhältnissen zu den bekannten Größen desto leichter finden.

150) Anmerkung. Schon die wenigen Beyspiele können Anfänger belehren, von welchem mannigfaltigen Nutzen die Rechnung mit Logarithmen ist. Ein vorzüglicher Gebrauch derselben wird in der Trigonometrie vorkommen. Folgendes Beyspiel von der Anwendung der Logarithmen auf geometrische Reihen mag hier den Beschluß machen.

151) Aufgabe. Das Gesetz zu finden, nach welchem ein Capital wächset, wenn man die Zinsen desselben am Ende eines jeden Jahres dazuschlägt, und von ihnen wieder Zinsen rechnet.

Das Capital sey z. B. 1000 und stehe zu 5 Procent Interessen, so hat man das Capital am Ende des ersten Jahres durch folgende Proportion:

$$100 : 105 = 1000 : 1000\,\tfrac{105}{100};$$

am Ende des zweyten Jahres

$$100 : 105 = 1000\,\frac{105}{100} : 1000\,\frac{105^2}{100};$$

am Ende des dritten Jahres

$$100 : 105 = 1000\,\frac{105^2}{100} : 1000\,\frac{105^3}{100} \text{ u. s. w.}$$

Nach 20 Jahren wird das Capital $\frac{105^{20}}{100}$ multipliciret mit dem anfänglichen Capital 1000 seyn: allgemein wird das Wachsthum eines Capitals, zu dem

5 Procent Interessen geschlagen werden, durch die Glieder einer geometrischen Reihe ausgedruckt, deren erstes Glied das anfängliche Capital, der Exponent $\frac{105}{100}$, und die Zahl des Gliedes die Zahl der Jahre ist. Mit Logarithmen die Rechnung geführet, giebt

$$\log. 105 = 2.0211893$$
$$\log. 100 = 2.$$
$$\log. \frac{105}{100} = 0.0211893$$
$$\log. \frac{105^{20}}{100} = 0.4237860$$
$$\log. 1000 = 3.$$
$$\log. 2653 = 3.4237860.$$

Die Geometrie mit Anwendung auf das Feldmessen.

I.

Erklärungen und Grundsätze.

1) Erklärung. Der geometrische Körper ist der nach allen Gegenden begränzte Raum (Einleitung 2.). Die geometrische Fläche ist die Gränze des geometrischen Körpers, die Linie die Gränze der Fläche, der Punkt die Gränze der Linie.

2) Anmerkung. Der geometrische Punkt ist die Gränze aller Ausdehnung, und hat also selbst gar keine Ausdehnung. Die geometrischen Puncte können nie in der Natur dargestellt werden, sondern nur sinnliche Bilder derselben durch kleine Körper, deren Größe als verschwindend angesehen wird (physische Punkte). Man denkt sich aber geometrische Punkte, um dadurch die Lage von Linien, Flächen und Körpern zu bestimmen. Eben so wenig, wie der geometrische Punct, können die geometrische Linie und Fläche in der Natur abgesondert ohne den Körper, zu dem sie gehören, dargestellt werden, sondern es sind dieß bloß abstracte Begriffe, welche nur gedacht werden. Indessen machen wir diese Abstraction selbst im gemeinen Leben viel häufiger, als man vielleicht glaubt. Wer denkt an Breite und Dicke des Weges, wenn er nach der Entfernung zweyer Orte fragt? oder an Tiefe des Bodens, wenn von dem Inhalte eines Feldes die Rede ist?

3) Anmerkung. Die gerade Linie ist eine solche, welche ihre Richtung nie ändert, oder deren Lage gegeben ist, sobald zwey Puncte in ihr gegeben sind.

Die krumme Linie ändert ihre Richtung in jedem Augenblick, und ist also in keinem ihrer Theile gerade. Der krummen Linien giebt es unzählige Arten, Fig. 1, 2, 3, der geraden Fig. 4. nur eine einzige.

4) **Anmerkung.** Jeder Mensch weiß eigentlich, was eine gerade Linie ist, so bald man ihn darauf aufmerksam macht, und braucht es nicht erst aus Definitionen zu lernen, welche im Grunde alle den Begriff von einer geraden Linie schon voraussetzen. Das folgende soll blos dazu dienen, die Aufmerksamkeit zu erregen, um dadurch die Vorstellung von der geraden Linie deutlicher zu machen.

Wenn man die Spitze eines Bleystiftes, einer Feder und dergleichen an einem Lineal herführet, so giebt der dadurch entstehende Strich ein sinnliches Bild einer geraden Linie. Man kann daher auch sagen, es entstehe eine gerade Linie, wenn sich ein geometrischer Punct von einem Orte zum andern, ohne seine Richtung zu ändern, bewegt. Der Weg des Punctes ist die gerade Linie. Jede gerade Linie kann man sich ins Unendliche zu beyden Seiten ausgedehnt vorstellen. Begränzte gerade Linien sind nur Stücke der unendlich großen. Jede gerade Linie ist gegeben, so bald ihre Lage gegeben ist. Ihre Lage ist gegeben, so bald zwey Puncte in ihr gegeben sind. Hieraus fließet folgender Grundsatz.

5) **Grundsatz.** Zwey Puncte bestimmen eine gerade Linie.

6) **Anmerkung.** Krumme Linien kann man durch zwey Puncte unzählig viele legen, aber eben dadurch unterscheiden sich die krummen Linien von der geraden, daß ihre Lage nicht in allen ihren Theilen dieselbe bleibt. Der vorstehende Grundsatz ist geometrisch wahr, die beyden gegebenen Puncte mögen noch so nahe beysammen liegen. In der Ausübung würde man beträchtlich

fehlen, wenn man aus sehr nahe liegenden Puncten eine gerade Linie bestimmen wollte. Wer sich davon überzeugen will, versuche es, und lege ein etwas langes Lineal an zwey nahe liegenden Puncten an. Man wird das Lineal an seinen Enden sehr merklich verrücken können, ohne daß es sich von den nahe liegenden Puncten sichtlich entfernt. Man würde sehr irren, wenn man hieraus schließen wollte, daß durch zwey gegebene Puncte mehrere gerade Linien gezogen werden können; denn man muß bedenken, daß alle Puncte und Linien, welche wir zeichnen, blos Bilder der geometrischen sind, und daß wir uns in der Ausübung der strengen geometrischen Wahrheit nur nähern, sie aber nicht erreichen können. Oft nimmt daher die Theorie etwas als leicht an, was in der Ausübung manche und viele Schwierigkeiten macht. Solche Aufgaben, deren Auflösung erhellet, so bald man den Satz verstanden hat, nennt man in der Mathematik Forderungssätze. Unter dieselben gehört auch der: durch zwey gegebene Puncte eine gerade Linie zu ziehen. Dem theoretischen Geometer ist dieß möglich, weil es gedacht werden kann. Die Auflösung findet schon Schwierigkeiten, wenn man eine gerade Linie auf dem Papier mit Genauigkeit ziehen will, noch mehr auf dem Felde. Zur Bezeichnung der Endpuncte gerader Linien auf dem Felde (wenn sie nicht ohnehin durch Häuser, Bäume oder andere Gegenstände kenntlich gemacht sind) bedient man sich runder Stäbe von Tannenholz, 4, 6 bis 10 Fuß lang, ¾ bis 1½ Zoll dick, die man lothrecht auf den Boden einsteckt. Zwey Stäbe befinden sich immer in einer geraden Linie (5. Satz). Wenn man zwischen zweyen Stäben einen dritten oder mehrere in gerader Linie einstecken soll, so verfahre man folgendermaßen: Man lasse einen Gehülfen den einzusteckenden Stab mit ausgestrecktem Arm lothrecht halten, gehe einen, oder etliche Schritte hinter einen der Endstäbe a Fig. 5. und untersuche, indem

man bald an der rechten, bald an der linken Seite des Stabes a nach dem Stabe b hinsieht, ob der Stab des Gehülfen c sich in der geraden Linie befindet. Ist dieß, so müssen die Seitenflächen der Stäbe a, c und b so zusammen fallen, daß, wenn man das Auge hinter a ein klein wenig nach der Mitte des Stabes zu vorrückt, man vor den Stäben a, c den b nicht mehr sieht. Man nennt dieses das Decken der Stäbe; so lange dieß nicht geschieht, winkt man dem Gehülfen rechts oder links. Es ist nicht hinreichend, daß der erste Stab a die folgende decke, denn wenn sich das Auge nahe hinter der Mitte des Stabes in d befindet, so kann durch denselben ein beträchtlicher Raum f d e verdeckt werden, welcher desto größer ist, je näher sich das Auge hinter dem Stabe befindet, und je dicker dieser ist. Um die Fehler, welche von einem nicht lothrechten Stande der Stäbe herrühren können, zu vermeiden, visire man nicht oben, sondern so nahe bey dem Boden, wie thunlich, an den Stäben her. Auf eben die Weise, wie man zwischen zwey Stäben einen dritten einvisirt, kann man eine durch zwey Puncte auf dem Felde bestimmte gerade Linie nach Willkühr zu beyden Seiten verlängern. Nur ist die schon oben gegebene Vorsicht zu beobachten, daß man die beyden Puncte, woraus die gerade Linie bestimmt werden soll, nicht zu nahe bey einander nehme.

Ganz besondere Schwierigkeiten findet das Abstekken gerader Linien in solchen Gegenden, wo man durch Berge, Waldung und dergleichen an der freyen Aussicht gehindert wird. Es ist hier der Ort nicht, vollständig zu erzählen, wie man diesen Hindernissen begegnet, sondern ich verweise desfalls auf Tob. Mayers practische Geometrie, 2te Ausgabe, Göttingen 1792. Ein Werk, welches ohnehin jeder, der sich vollständige Kenntnisse in der practischen Geometrie erwerben will, nicht unbenutzt lassen darf. Die neue Ausgabe enthält

4 Theile. Die 3 ersten beschäftigen sich blos mit der Feldmeßkunst, und allen dahin einschlagenden Kenntnissen. Der 4te, welcher auch allein unter dem Titel: vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelscharten, und der Netze zu Coniglobien und Kugeln zu haben ist, beschäftiget sich blos mit den genannten Gegenständen. Hier füge ich nur die Auflösung einer Aufgabe bey, welche bey Absteckung gerader Linien von vielfältigem Nutzen seyn kann.

a, b Fig. 6. sind zwey Puncte, zwischen welchen man zwey oder mehr Stäbe c, d in gerader Linie einstecken will. Ich nehme an, man könne nicht unmittelbar von a nach b, wohl aber von d nach c und a, und von c nach d und b sehen. Zwey Personen stecken in c und d ihre Stäbe nach Gutdünken in die gerade Linie a b ein. Hierauf visirt c den Gehülfen d nach c b in d^1 ein, und alsdann richtet der Gehülfe in d^1 den ersten c in die Linie d^1 a, so fahren sie wechselsweise fort, bis sowohl d mit c und b, als c mit d und a in gerader Linie sind, da alsdann alle 4 Puncte a c d b in gerader Linie liegen. Durch eine kleine Uebung bringt man diese Arbeit leicht zu Stande. Man nennt dieses das Einrichten in die Linie durch vorwärts und rückwärts visiren.

7) Erklärung. Eine ebene Fläche, oder Ebene ist diejenige, in welcher man von jedem Punct aus nach allen Gegenden gerade Linien ziehen kann, welche ganz in die Ebene hinein fallen. Eine krumme Fläche ist eine solche, von welcher kein Theil eben ist.

8) Anmerkung. Der krummen Flächen giebt es unzählig viele, der ebenen nur eine einzige. Mehrere ebene Flächen an einen Ort gebracht, fallen ganz zusammen. Es giebt krumme Flächen, welche ganz in sich zurückkehren und von bestimmter Größe sind, wie

die Oberfläche der Kugel und der kugelähnlichen Körper. Krumme Flächen sind einfach gekrümmt, wenn man nach gewissen (nicht nach allen) Richtungen gerade Linien in ihnen ziehen kann, welche mit der Fläche zusammenfallen, doppelt gekrümmt, wenn man nach keiner Richtung gerade Linien in ihnen ziehen kann. Die Cylinder- und Kegelfläche sind von der ersten, die Kugelfläche ist von der andern Art.

9) **Erklärung.** Zwey gerade Linien c a, c b Fig. 7, welche irgendwo in c zusammentreffen, schneiden sich, und haben ausser dem Schneidungspuncte c keinen miteinander gemein. Denn hätten sie nur zwey Puncte miteinander gemein, so machten sie nur eine Linie aus, oder es müßten durch zwey Puncte zwey verschiedene gerade Linien gelegt werden können, gegen den 5. Grundsatz. Jenseits des Schneidungspunctes verlängert, laufen die Linien wieder auseinander (sie sind divergirend), nach ihm hin laufen sie zusammen (sind convergirend).

10) **Erklärung.** Die Lage zweyer geraden sich schneidenden Linien gegen einander heißt ein Winkel. c ist der Scheitel des Winkels, c a, c b sind seine beyden Schenkel. Man benennt einen Winkel entweder durch einen Buchstaben, welchen man zwischen seine Schenkel schreibt, z. B. $<$x (Winkel x), oder besser durch drey Buchstaben, wovon zwey an seinen Schenkeln, und einer am Scheitel stehen. Der Buchstaben am Scheitel kommt in die Mitte, z. B. $<$a c b.

11) **Erklärung.** Nebenwinkel a c b, b c d Fig. 8 sind solche Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Schenkel c b, und die beyden andern Schenkel c d, c a in einer geraden Linie haben.

12) **Erklärung.** Verticalwinkel x y, Fig. 7. sind die am Scheitel entgegengesetzten Winkel zweyer geraden sich schneidenden Linien.

13) Erklärung. Wenn die Nebenwinkel einander gleich sind, wie Fig. 9. a c b, b c d, so heißen sie rechte Winkel, die Linie b c heißt eine auf a d, senkrechte, lothrechte, perpendikulare Linie. Sind die Nebenwinkel ungleich, Fig. 8. so heißen sie schiefe Winkel, der größere a c b ein stumpfer, der kleinere b c d ein spitziger Winkel. Zur Bezeichnung eines rechten Winkels bedient man sich des Buchstaben R.

14) Erklärung. Eine mit Linien begränzte Fläche heißt eine Figur, ist die Fläche eben, eine ebene Figur. Geradelinicht, krummlinicht, gemischtlinicht heißt die Figur, nach dem ihre Gränzen aus geraden, krummen Linien, oder aus beyden zugleich bestehen. Die Gränzlinien heißen die Seiten der Figur. Wenn in der Folge nichts bestimmt wird, so verstehe ich unter Figur blos eine ebene geradlinichte Figur.

15) Erklärung. Zwey gerade Linien schliessen keinen Raum ein. Die geringste Anzahl von Seiten, welche eine ebene geradlinichte Figur haben kann, sind drey. Nach der Zahl der Seiten nennt man die Figuren Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. Ueberhaupt Vielecke, sobald die Zahl der Seiten größer als vier ist.

16) Erklärung. Die Dreyecke werden eingetheilt, in Rücksicht der Seiten,

a) gleichseitige, drey Seiten gleich;
b) gleichschenklichte, zwey Seiten gleich;
c) ungleichseitige, keine Seite gleich.

In Rücksicht der Winkel,

a) rechtwinkelichte, ein Winkel recht,
b) stumpfwinkelichte, ein Winkel stumpf,
c) spitzwinkelichte, drey Winkel spitz.

In einem gleichschenkelichten Dreyeck heißen die beyden gleichen Seiten insbesondere die Schenkel, die

dritte Seite die Basis oder Grundlinie. In einem rechtwinkelichten Dreyecke heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite Hypotenuse.

17) Erklärung. Zwey gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und einander nicht schneiden, wenn sie auch beyde ins Unendliche verlängert werden, heissen Parallellinien oder gleichlaufende Linien, wie a b c d Fig. 10.

18) Erklärung. Die Vierecke werden eingetheilet in Rücksicht der Lage der Seiten,

a) Parallelogramme, worinn je zwey gegenüberstehende Seiten parallel sind,
b) Trapezia, worinn zwey Seiten parallel, zwey nicht parallel sind.
c) Ungleichseitige Vierecke, worinn keine Seite mit der andern parallel ist.

Die Parallelogramme werden eingetheilet, in Rücksicht der Winkel,

a) Rechtecke, alle Winkel rechte,
b) schiefwinkelichte Parallelogramme, kein Winkel ein rechter;

in Rücksicht der Seiten,

a) gleichseitige,
b) ungleichseitige.

Das gleichseitige Rechteck heißt Quadrat Fig. 11., auch schlechtweg Rechteck (rectangulum oblongum). Das schiefwinkelichte gleichseitige Parallelogramm Fig. 13 heißt Raute (Rhombus), das ungleichseitige schiefwinkelichte Parallelogramm Fig. 14. länglichte Raute (Rhomboides).

19) Erklärung. Figuren, worinn alle Seiten und Winkel einander gleich sind, heißen ordentliche (reguläre) Figuren.

20) **Anmerkung.** Das Quadrat ist das ordentliche Viereck, der gleichseitige Triangel, das ordentliche Dreyeck. Das letzte wird in der Folge erwiesen, auch kann die Verzeichnung der vorgenannten Figuren erst in der Folge vorkommen.

21) **Erklärung.** Unter den unzählig vielen krummlinichten Figuren ist bloß der Kreis ein Gegenstand der Elementargeometrie. Er entstehet, wenn sich eine gerade Linie ca Fig. 15. um einen ihrer Endpuncte c in einer Ebene so herum dreht, daß sie nach und nach in die Lagen cb, cd, cf kommt, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage ca zurückgekehrt ist. Die krumme Linie, welche der andere Endpunct b der sich drehenden geraden Linie beschreibt, heißt der **Umfang** oder die **Peripherie** des Kreises, c der **Mittelpunct** desselben, eine gerade Linie vom Mittelpuncte nach dem Umfang gezogen, **Halbmesser**. Verlängert man einen Halbmesser von dem Mittelpuncte rückwärts, bis er wieder in den Umfang eintrifft, so erhält man einen **Durchmesser** des Kreises. Aus der Entstehungsart des Kreises erhellet, daß alle Halbmesser und Durchmesser (die doppelten Halbmesser) einander gleich sind, oder der Mittelpunct von allen Puncten des Umfanges gleich weit abstehet. Eine gerade Linie eg, welche den Umfang des Kreises in zwey Puncten schneidet, ohne durch seinen Mittelpunct zu gehen, heißt **Sehne** oder **Chorde**. Die beyden durch eine Sehne abgeschnittenen Stücke des Kreises **Abschnitte, Segmente**. Ein Theil des Kreises, welcher zwischen zwey Halbmessern und einem Theil des Umfangs enthalten ist, wie bca, heißt ein **Ausschnitt** oder **Sector**.

22) **Forderung.** Mit jeder gegebenen geraden Linie als Halbmesser, um jeden Punct als Mittelpunct einen Kreis zu beschreiben.

23) An-

23) **Anmerkung.** So leicht die Auflösung der vorstehenden Forderung dem Geometer ist, welchem es genügt, sich um jeden Punct als Mittelpunct mit jedem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschrieben zu denken, eben so schwer fällt oft die genaue Auflösung dieser Aufgabe dem Künstler oder dem Feldmesser. Zur Zeichnung kleiner Kreiße auf dem Papier bedienet man sich des bekannten **Zirkels.** Die Oeffnung zwischen dessen Spitzen stellt die Größe des Halbmessers vor, welcher herumgeführt wird, indem man den Zirkel auf einer Spitze ruhen, und die andere sich um die ruhende drehen lässet. Eben dieses Instruments bedienet sich auch der Handwerker und Künstler, um kleine Kreise auf Holz und Metall zu zeichnen, nur daß hierzu schon Zirkel von größerer Dauerhaftigkeit, und einer festern Stellung nöthig sind. Der eigentlich sogenannte Stellzirkel wird hierzu mit Vortheil gebraucht. Der eine Fuß dieses Zirkels wird an einem gezähnten metallenen Bogen durch einen Trieb auf und ab bewegt, und in jeder beliebigen Entfernung von dem unbeweglichen Fuß durch eine Schrgube festgehalten. Die vortheilhafteste Einrichtung und die Art, Zirkel zu verfertigen betreffend, sehe man **Bions** mathematische Werkschule, und wenn man die Weise, wie die neuesten englischen Künstler die mathematischen Instrumente verfertigen, kennen lernen will, vorzüglich **Adams geometr.** und **graph. Versuche oder Beschreibung der mathematischen Instrumente, deren man sich in der Geometrie, der Civil- und Militair-Vermessung beym Nivelliren und in der Perspective bedienet, überf. von Geißler. Leipzig bey Cruf. 1795.** Zum Verzeichnen größerer Kreise auf dem Papier, auf Holz und Metall, so wie zum genauen Aufnehmen von Längenmaaßen, bedienet man sich des **Stangenzirkels.** Die Haupttheile dieses Werkzeuges bestehen in einem viereckigten Stab von Holz oder Metall, über welchen sich zwey an metallenen Hülsen befestigte stäh-

lerne Zirkelfüße hin- und herschieben, und in jeder beliebigen Entfernung voneinander feststellen lassen. Der Hülse des einen Zirkelfußes muß durch eine Schraube eine sehr feine Bewegung auf dem Stabe gegeben werden können. Hr. v. Zach hat in dem ersten Supplementenband zu Bodes astron. Jahrbuch einen sehr vollkommenen Stangenzirkel beschrieben, dessen er sich zur Bestimmung der Länge des Secundenpendels bediente. Kleine Stücke von sehr großen Kreisen mit vieler Genauigkeit zu entwerfen, hat man besondere Werkzeuge erdacht, die zum Theil auf geometrischen Gründen beruhen, welche in der Folge vorkommen. Auf dem Felde zieht man Kreiße, indem man eine Stange, eine Schnur oder Kette an dem einen Ende festhält, indeß man das andere mit einem Stift oder Spitze versehene Ende herumführt, und so den Umfang des Kreises auf dem Boden einkratzet.

24) Grundsatz. Größen, welche so auf einander gelegt, oder so an demselben Ort gedacht werden können, daß sie ganz zusammen fallen, decken einander. Solche Größen sind vollkommen gleich, und man kann eine für die andere setzen. Umgekehrt, Größen, welche gleich sind, decken einander.

25) Satz. Jeder Durchmesser theilet den Kreis in zwey gleiche Theile (Halbkreise).

Denn man lege den einen Halbkreis so auf den andern, daß der gemeinschaftliche Durchmesser a b Fig. 16. auf sich selbst fällt, so fällt jeder Punkt e in den Umfang des einen auf einen Punct d in den Umfang des andern, welche um gleiche Winkel e c b, b c d von dem Durchmesser abstehen, indem alle Puncte des Umfangs gleich weit von dem Mittelpunct c entfernt sind, es deckt daher der ganze Umfang des einen Halbkreises den ganzen Umfang des andern, und beyde Halbkreise sind gleich.

26) Alle rechte Winkel decken einander, denn sie sind gleich.

27) Ausser den vorstehenden Grundsätzen sind noch folgende allgemeine mathematische Grundsätze zu bemerken, welche sowohl für stetige als unstetige Größen gelten. Gleiches zu Gleichem addiret, von Gleichem subtrahiret, mit Gleichem multipliciret oder dividiret, giebt Gleiches. Ungleiche Größen addiret, subtrahiret, multipliciret oder dividiret, geben ungleiche Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten u. dgl. m. Eben so sind die für die arithmetischen Arbeiten eingeführte Zeichen in der Geometrie gebräuchlich. Ausserdem ist hier folgendes Zeichen zu bemerken, wenn Größen ungleich sind, so setzt man zwischen beyde $>$ und zwar die Oeffnung nach der größern, die Spitze nach der kleinern Größe; $a > b$, lese man a größer als b. Zur Bezeichnung der stetigen Größen, so wie der Größen im Allgemeinen, bedienet man sich der Buchstaben.

II.

Von der Lage der geraden Linien gegen einander und der Lehre von den Parallellinien.

28) **Satz.** Die Nebenwinkel zusammengenommen, sind immer zwey Rechten gleich. Wenn die Nebenwinkel gleich sind, Fig. 9. so erhellet der Satz von selbst. Sind sie ungleich, Fig. 8. so denke man sich von dem gemeinschaftlichen Scheitel c aus eine Perpendicularlinie ce aufgerichtet, so wird der stumpfe Winkel acb einen Rechten um den Winkel ecb übertreffen, und eben dieser Winkel ecb fehlet dem spitzen Winkel bcd zu einem Rechten, folglich machen beyde Nebenwinkel zusammen zwey Rechte aus. Eben dieses gilt von mehr als zwey Winkeln, welche auf einer Seite einer geraden Linie ad liegen und einen gemein-

schaftlichen Scheitel c haben. Daher sind alle Winkel, welche um einen Punct rings herum liegen, zweymal zwey Rechten, d. i. vier Rechten gleich.

29) Satz. Die Scheitel-Winkel sind gleich.

Daß $x = y$ Fig. 7. wird so erwiesen, $y + u = 2$ R weil es Nebenwinkel sind, $u + x = 2$ R aus demselben Grund; daher $u + x = u + y$, folglich $x = y$. Eben so $u = w$, denn

$$\begin{array}{r} u + x = 2\text{ R} \\ x + w = 2\text{ R} \\ \hline u + x = x + w \\ u = w \end{array}$$

30) Satz. Zwey gerade Linien, welche sich in einer Ebene befinden, schneiden entweder einander, oder sind parallel.

Dieser Satz fließet als Grundsatz aus dem Begriff von der geraden Linie. Folgendes wird dazu dienen, ihn zu erläutern: ab, cd, Fig. 17. seyen zwey parallele Linien. Man schneide sie durch eine dritte gerade Linie ef, ich behaupte, die beyden parallelen Linien haben gegen die dritte sie schneidende Linie einerley Lage. Man schiebe die Linie ab so nach cd hin, daß der Winkel eab, welchen ab mit der Linie ef macht, immer derselbe bleibt, so wird ab mit cd parallel bleiben, und ihr immer näher rücken, denn die Lage von ab hat sich durch dieses Verschieben nicht geändert. ab kann auf diese Weise so nahe an cd rücken, bis es ganz mit ihr zusammen fällt, alsdann fällt der Winkel eab auf den Winkel acd, beyde decken einander und sind gleich. Daher haben die Linien ab, cd gegen ef einerley Lage.

Sollen zwey gerade Linien gegen eine dritte sie gemeinschaftlich schneidende verschiedene Lage haben, so müssen die Winkel, welche sie mit dieser dritten Linie nach einer Gegend hinmachen, verschieden seyn. Hier

finden zwey Fälle statt. Entweder ist der äussere Winkel eaB größer als der innere gegenüber stehende ecd, oder er ist kleiner. Ich behaupte, im ersten Fall schneiden sich die beyden Linien aB cd auf der Seite von ef, auf welcher die vorhin genannten Winkel liegen, im andern Fall auf der entgegengesetzten Seite. Denn man schiebe die Linie aB so an ef herunter, daß der Winkel eab unverändert bleibt, so erhellet, daß, wenn der Punct a in die Stelle c gekommen ist, die ganze Linie aB unterhalb cd in cD fallen muß, weil der Winkel ecD = eaB > ecd. Nun lag aber vorher ein Theil der Linie aB über cd, folglich muß dieser Theil, indem aB nach cD rückte, nach und nach durch cd geschoben worden seyn, d. i. aB und cd müssen sich irgendwo in g geschnitten haben, und dieser Durchschnittspunct g muß nach c zugerückt seyn, indem aB sich der Lage cD näherte. Die Behauptung für den andern Fall fließet aus dem ersten. Denn es sey Fig. 18. der äussere Winkel eab < ecd, so ist auf der entgegengesetzten Seite von ef der äussere eag größer als der innere gegenüber stehende ecg, weil

$$2\,R - eab = eag$$
$$2\,R - ecd = ecg,$$

aber $eab < ecd$

folglich $eag > ecg$.

Es liegt also vermög des ersten Falls der Durchschnittspunct g der beyden Linien ab, cd auf der Seite von ef, welche den Winkeln eab, ecd entgegen gesetzt ist. Da zwey gerade Linien ab, cd gegen eine dritte schneidende ef einerley, oder verschiedene Lage haben müssen, und in dem ersten Fall der Parallelismus, in dem andern ein Schneiden statt findet, so fließt hieraus der oben stehende Grundsatz.

31) Erklärung. Wenn zwey gerade Linien a b, c d Fig. 19. von einer dritten geraden e f geschnitten werden, so heißen die Winkel u, x; z, w; **innere entgegen stehende**, z, x; u, w **Wechselwinkel.**

32) Satz. Wenn zwey gerade Linien a b, c d Fig. 19. von einer dritten geraden geschnitten werden, und I der äussere Winkel y dem innern x gleich, oder II die beyden innern u, x machen zusammen zwey Rechte, III die Wechselwinkel z, x; u, w sind einander gleich: so sind die beyden Linien a b, c d parallel.

Vermöge I haben die beyden Linien einerley Lage gegen die schneidende e f, also sind sie parallel (30), II und III sind Folgen von I.

Denn $x = y$, und $u + y = 2\,R$

folglich $x + u = 2\,R$

und ferner $x = y$

$y = z$ (29)

folglich $x = z$

$z + u = w + x = 2\,R$

$u = w.$

33) Satz. Wenn zwey parallele Linien von einer dritten geraden geschnitten werden, so ist I der äussere Winkel y dem innern x gleich, II die beyden innern Winkel machen zusammen zwey Rechte, III die Wechselwinkel sind gleich.

Dieser Satz ist der umgekehrte des vorhergehenden. I fließet aus (30), und die beyden andern aus I.

34) Anmerkung. Aus den vorstehenden Sätzen erhellet, daß man einer gegebenen geraden Linie c d eine a b parallel ziehen könne, wenn man c d durch eine dritte e f unter einem willkührlichen Winkel x schneidet, und diesen Winkel an der Linie e f nach y trägt. Da die Verzeichnung eines gleichen Winkels noch nicht ge-

lehrt worden ist, so kann diese Aufgabe der Ordnung gemäß erst in der Folge vorkommen.

Vorläufig bemerke ich folgende mechanische Auflösung, welche zur Zeichnung von Parallellinien auf dem Papier die bequemste und richtigste ist. Man lasse sich von einem Schreiner ein recht genaues hölzernes Lineal und rechtwinklichtes Dreyeck verfertigen, welche $1\frac{1}{2}$ bis 2 Linien dick sind, damit sie sich nicht zu leicht biegen, und schon vermöge ihres Gewichtes etwas fest auf dem Papier ruhen. Man lege das rechtwinklichte Dreyeck, wie Figur 20 zeigt, an die gegebene Linie a b an, hierauf das Lineal an die andere Seite des Dreyecks, halte jenes fest, und verschiebe dieses bis an die Stelle, wo die Parallele c d mit a b gezogen werden soll. Es ist nicht nöthig, daß man sich gerade des rechten Winkels zum Verschieben bediene, sondern man kann, vermöge 30, jeden Winkel dazu brauchen, folglich auch einen der schiefen des rechtwinklichten Dreyecks. Wenn Fig. 17. die Linie a B sich um den Punct a so drehet, daß sie nach und nach in die Lage a b^1, und endlich in die mit c d parallele Lage a b kommt, so rückt der Durchschnittspunct der Linien a B, c d von g nach b^1 immer weiter bis ins Unendliche hinaus, ehe die Linie a B in die parallele Lage a b kommt. Man sagt daher auch (wiewohl nicht mit geometrischer Schärfe), Parallellinien schneiden sich in unendlicher Entfernung. Bey den Anwendungen der Geometrie, wo man sich ohnehin nur der mathematischen Schärfe nähern kann, wird es daher erlaubt seyn, kleine Stücke zweyer geraden Linien, welche sich erst in großer Ferne schneiden, schon für parallel zu halten. So sagen wir, die Schatten, welche lothrechte Gegenstände in dem Sonnenschein auf den Boden werfen, seyen unter sich parallel, eben das behauptet man von zwey oder mehr neben einander aufgehängten Lothen, ungeachtet in jenem Fall die Lichtstrahlen, welche die Schatten begränzen, in der Sonne,

die Richtung der Lothe in dem Mittelpunct der Erde zusammen laufen. Die Neigung dieser Linien gegen einander ist aber so unmerklich, daß sie für die Schärfe unsrer Sinne völlig verschwindet. Dieß giebt ein sehr leichtes Mittel dem Feldmesser an die Hand, Parallellinien zu ziehen, wo er einen freyen Horizont, und in der Ferne sich auszeichnende Gegenstände hat. A Fig. 21. sey ein solcher Gegenstand. Man visire von den beyden Puncten a und c, durch welche die Parallellinien gezogen werden sollen, nach dem fernen Gegenstand, und ziehe a b, c d, so ist die Aufgabe aufgelößt. Wie weit man die Linien a b, c d ohne merkliche Abweichung von der parallelen Lage verlängern dürfe, das hängt von dem Verhältniß der Größe dieser Linien zu der Entfernung c A : c d ab, indem der Fehler mit diesem Verhältniß wächst, wie die Folge lehren wird.

35) Satz. Wenn zwey Linien einer dritten parallel sind, so sind sie unter einander selbst parallel. — Hierbey wird vorausgesetzt, daß alle drey Linien sich in einer Ebene befinden. Es seyen a b, e f Fig. 22. beyde mit c d parallel. Man ziehe g k, welche a b, c d schneidet, und verlängere sie gehörig, so wird sie vermöge (30) auch e f irgendwo in h schneiden. Nun sind die Winkel x, y, z gleich, folglich a b mit e f parallel. Eben das gilt von mehr als drey Linien, welche mit einer andern gemeinschaftlich parallel sind.

36) Satz. Wenn man in einem Dreyeck Fig. 23. eine Seite a c nach d verlängert, so ist der äussere Winkel d c b so groß, als die beyden innern Winkel a, b des Dreyecks zusammen genommen. Man schiebe den $< a$ nach c hin, so daß $c d e = < a$, so ist c e parallel mit a b und $e c b = < b$, weil es Wechselwinkel sind, folglich $d c e + e c b = d c b = a + b$.

37) Satz. In jedem Dreyeck ist die Summe der drey Winkel zwey Rechten gleich. Man verlängere

willkührlich eine Seite des Dreyecks, z. B. a c Fig. 23. so ist d c b = a + b, aber d c b + < c im Dreyeck = 2 R, folglich a + b + c = 2 R.

38) Anmerkung. Dieser Lehrsatz dienet in der ausübenden Meßkunst zu prüfen, ob man die Winkel eines Dreyecks richtig bestimmt habe. Auch erhellet daraus, warum in einem Dreyeck nicht mehr als ein rechter, noch viel weniger mehr als ein stumpfer Winkel seyn kann, und wird also dadurch die vornen gegebene Erklärung dieser Dreyecke gerechtfertiget.

III.

Gleichheit der Dreyecke und Folgerungen.

39) Satz. Wenn in zwey Dreyecken a b c, A B C Fig. 24. zwey Seiten a b, a c gleich AB, AC sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel a = A, so sind die ganzen Dreyecke gleich, daher auch die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite.

Man denke sich das eine Dreyeck, so auf das andere gelegt, daß eine dergleichen Seiten a c auf AC fällt, so wird wegen dergleichen Winkel a, A auch ab längst AB fallen, und weil diese Linien gleich sind, der Punkt b auf B, folglich auch die Seite b c auf B C, und die ganzen Dreyecke decken einander und sind gleich.

40) Anmerkung. Man drückt diesen Satz auch so aus: zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel bestimmen ein Dreyeck. Die Anwendung dieses Lehrsatzes kommt in der ausübenden Meßkunst unzählig oft vor. Hier setze ich eine als Beyspiel her. Es finden sich bey der Ausmessung eines Feldes oder einer Gegend oft Hindernisse, daß man in der geraden Linie, deren Entfernung man eigentlich wissen will, nicht fortmessen kann. Es sey a b Fig. 25. eine solche Entfernung, welche man bestimmen will, und nicht geradezu messen

kann. Man wähle einen Standpunct c, von welchem aus man nach a und b kommen kann. Messe die beiden Linien ca, cb, trage sie rückwärts in ce, cd, so ist de = ab. Denn die Scheitelwinkel bey c in den beyden Dreyecken, und die diesen Winkel einschließenden Seiten sind vermöge der Construction gleich, folglich die ganzen Dreyecke nach dem vorhergehenden Lehrsatz.

41) Satz. Wenn in zwey Dreyecken abc, ABC Fig. 24. eine Seite ac = AC, und die an dieser Seite liegenden Winkel a = A und c = C sind, so sind die ganzen Dreyecke gleich. Man lege die Dreyecke mit den gleichen Seiten auf einander, so fällt wegen der Gleichheit der Winkel a = A, c = C, ab längst AB, bc längst BC, und weil zwey sich schneidende gerade Linien nur einen Punct gemein haben, b auf B. Folglich decken die Dreyecke einander, und es sind alle Seiten und Winkel nach einerley Ordnung in beyden Dreyecken gleich. Der Satz kann auch so ausgedruckt werden: eine Seite und die beyden anliegenden Winkel bestimmen ein Dreyeck.

42) Wenn in einem Dreyeck abc Fig. 24. zwey an einer Seite liegende Winkel a und c einander gleich sind, so sind auch die den Winkeln gegen über stehende Seiten ab, bc gleich. Man denke sich das Dreyeck abc, noch einmal, oder ein ihm gleiches unter ABC, und lege dasselbe umgewendet so auf abc, daß der Winkel C auf a, A auf c fällt, so decken beyde Dreyecke auch in dieser Lage einander. Daher ist ab = BC, es war aber vermöge der Annahme BC = bc; folglich ist ab = bc.

43) Satz. Wenn in einem Dreyeck die beyden Seiten ab, bc gleich sind, so sind es auch die den Seiten gegen über liegenden Winkel a und c. Dieser Satz ist der umgekehrte von dem vorhergehenden und wird auf dieselbe Weise erwiesen.

Man drückt diese Sätze auch so aus. Wenn in einem Dreyeck die Winkel an der Grundlinie gleich sind, so ist das Dreyeck gleichschenklicht, und umgekehrt, in einem gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

44) Satz. In einem gleichseitigen Dreyeck sind die drey Winkel einander gleich und jeder ist $\frac{2}{3}$ R.

Vermöge der Gleichheit von ab, bc ist $< a = < c$,
vermöge der Gleichheit von ac, bc ist $< a = < b$;

folglich die drey Winkel einander gleich. Da ihre Summe $= 2$ R, so ist jeder $= \frac{2}{3}$ R.

45) Satz. Da in jedem Dreyeck die Summe der Winkel $= 2$ R, so ist der dritte Winkel bestimmt, sobald zwey gegeben sind. Zwey Dreyecke sind daher gleich, wenn zwey Winkel und eine Seite in ihnen gleich sind, unter den gleichen Winkeln kann auch einer der gleichen Seite gegen über stehen. Nur müssen die Winkel in einerley Ordnung gleich seyn, der anliegende dem anliegenden, und der gegen über stehende dem gegen überstehenden. Denn es sey Fig. 24. $ac = AC$, $a = A$, $b = B$, so ist auch $c = C$; folglich die Dreyecke gleich (42).

46) Anmerkung. Wenn die Winkel nicht in einerley Ordnung gleich sind, so können zwey Dreyecke ungleich seyn, und drey gleiche Winkel und eine Seite gleich haben. Fig. 26. mag dieß erläutern. In den beyden Dreyecken acb, dab sind die Seite ab und $< b$ gemeinschaftlich, wenn nun $< cab = < d$ ist, welches offenbar möglich ist, weil man der Seite ac jede Lage gegen ab geben kann, so ist auch der dritte $< c$ dem $< dab$ gleich, und doch sind die Dreyecke ungleich, indem das eine einen Theil des andern ausmacht. Mehr als zwey Dreyecke von den gegebenen Eigenschaften können nicht statt finden, weil es nur eine Verwechslung der Winkel acb, cab giebt.

zeichnen, ist zwar eine der richtigsten, aber, vorzüglich auf dem Felde, eine der unbequemsten. Man hat, um gegebene Winkel auf dem Felde, wie man es nennt, aufzunehmen und zu Papier zu bringen, oder an einem andern Orte abzustecken, besondere Instrumente, die zum Theil die Winkel in Graden angeben (die eigentlichen Winkelmesser, hiervon unten), zum Theil den Winkel durch Construction bestimmen. Unter die letzte Classe gehört vorzüglich das Meßtischchen (mensula praetoriana). Die Haupttheile dieses Werkzeuges sind, ein 12 — 18 Zoll ins Gevierte haltendes Bretchen von gutem trocknem Holz, auf welches ein Bogen Papier vermittelst eines Rahmens glatt aufgespannt, oder besser mit Mundleim befestiget werden kann. Der untere Theil des Tischchens ist mit einer metallenen Hülse und einem Kugelscharnier (Nuß) versehen, womit es auf den Zapfen eines dreyfüßigen Stativs gesteckt und so befestiget wird, daß man es leicht in eine horizontale Lage bringen, und in dieser sanft herum drehen kann, ohne das Stativ zu bewegen. Auf dem Meßtisch braucht man ein Lineal von Holz oder Meßing, an dessen Enden zwey Dioptern lothrecht befestiget sind. Der Schnitt und Faden der Dioptern, Fig. 99. müssen sich in einer lothrechten Ebene über der Kante des Lineals befinden, deren man sich zum Ziehen der Linien auf dem Meßtisch bedient. Die Dioptern müssen zwey bis drey Zoll hoch seyn, damit man bey horizontalem Stande des Tischchens nach etwas erhabenen und vertieften Gegenständen sehen könne. Soll das Meßtischchen in sehr bergichten Gegenden gebraucht werden, wo man der Erhebung und Vertiefung der Puncte ungeachtet, wie unten bewiesen wird, doch nur horizontale Winkel messen darf, so muß das Diopternlinial eine besondere Einrichtung, Kippregel, haben. Diese besteht aus zwey Linialen, wovon das untere auf dem Meßtischchen ruht, das obere, das die Dioptern trägt, sich über dem untern in einer

lothrechten Ebene auf und nieder bewegt. Man bringt in neuern Zeiten, statt der gewöhnlichen Dioptern, lieber ein Fernrohr auf dem Linial des Meßtischchens an, um ferne Gegenstände deutlichee und größer zu sehen, und die Winkel schärfer nehmen zu können. Die Mittellinie (Achse) des Fernrohres, welche durch zwey innerhalb des Perspectivs sich kreutzende Fäden, oder durch ein auf Glas gezeichnetes Kreutz genau angegeben wird, dienet hierbey als Absehlinie. Die genaue und zweckmäßige Einrichtung dieses sowohl als der vorerwähnten Theile, deren richtige Beurtheilung mechanische und optische Einsichten voraussetzt, muß der mündliche Unterricht, nebst Vorzeigung der Werkzeuge, oder vollkommener Abbildungen derselben erläutern. s. Tob. Mayers oben angeführte pract. Geom. §. 108. u. f. Brander der neue geometrische Universalmeßtisch. Augspurg 1772. Hogreve Anleitung zur topographischen Vermessung eines ganzen Landes. Hannover und Leipzig 1773. Diese letzte Schrift ist Anfängern, welche eine gute Einrichtung des Meßtisches und den mannichfaltigen Gebrauch desselben wollen kennen lernen, vorzüglich zu empfehlen, weil sie blos Elementargeometrie voraussetzt.

Einen auf dem Felde gegebenen Winkel A c B, Fig. 37. vermittelst des Meßtisches zu Papier zu bringen, verfahre man also: Man bringe den Meßtisch, oder vielmehr einen beliebigen Punct c desselben lothrecht über den Scheitelpunct des gegebenen Winkels c, lege das Diopterlinial an den Punct c (in den man eine feine Nadel stecken kann) an, und drehe es um, bis man durch die Visire einen der beyden Gegenstände A erblickt, hierauf ziehe man an der Schärfe des Linials die Linie c a, eben so drehe man das Linial nach dem andern Gegenstande B, und ziehe die Linie c b, so ist a c b der verlangte Winkel. Will man umgekehrt einen auf dem Meßtisch gezeichneten Winkel auf dem Felde

giebt die Oeffnung der beyden Linialе unmittelbar den Winkel an. Um ihn zu Papier zu bringen, sind auf den beyden Linialen gleiche Entfernungen ca, cb von dem gemeinschaftlichen Mittelpunct c aufgetragen, und die Endpuncte c, b durch feine Pünctchen kenntlich gemacht. Man trägt mit dem Zirkel die Seiten des Dreyecks acb auf das Papier, so wird eben dadurch der Winkel c verzeichnet. Wie man die Winkel vermittelst des Recipiangels auch in Graden und Minuten finden könne, wird unten in der Trigonometrie gelehret werden.

66) Anmerkung. Als eine Anwendung von 62.) setze ich folgende Aufgabe der praktischen Geometrie her. Die Breite eines Stromes ab Fig. 41. zu messen.

Man nehme in der verlängerten ab den Punct c, ferner den Punct d willkührlich an, trage cd rückwärts in de, in e setze man den Winkel c, und verlängere db rückwärts bis sie den einen Schenkel des Winkels e in f schneidet, so ist Dreyeck edf = edb (41.) also ef = cb. Hiervon ziehe man ac ab, so bleibt die Breite ab des Stromes übrig.

67) Aufgabe. Einer Linie ab Fig. 42. durch einen gegebenen Punct c ausser ihr eine Parallele zu ziehen. Man verbinde die Puncte ac, ab durch gerade Linien, und trage den Winkel b im Dreyeck abc nach c auf die dem Dreyeck entgegengesetzte Seite, so ist cd parallel mit ab (32).

68) Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten a, b mit dem eingeschlossenen Winkel c Fig. 43. ein Parallelogramm zu verzeichnen. Man beschreibe mit den beyden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel das Dreyeck bac, indem man auf den Schenkel des gegebenen Winkels c, welcher nach (62) an einen beliebigen Ort b getragen werden kann, ba = a, bc = b ab-

schneidet und ca zieht. Hierauf beschreibe man mit ba aus c, und mit bc aus a Kreisbögen, welche sich in d schneiden, ziehe cd, ad, so ist abcd das verlangte Parallelogramm. Denn es ist vermöge der Construction das Dreyeck bca = cad, daher < cab = acd und cad = acb, daher cd mit ab, bc mit ad parallel (32).

69) Erklärung. Eine Linie, welche man in einer vier- oder vieleckigten Figur von einem Winkelpunct zu einem gegenüberstehenden wie, ac Fig. 43. zieht, heißt eine Diagonale.

70) Satz. I. Die Diagonale theilet jedes Parallelogramm in zwey gleiche Dreyecke. II. In jedem Parallelogramm abcd Fig. 43. sind die gegenüberstehenden Seiten gleich, oder Parallelen zwischen Parallelen sind gleich. III. Die nach der Diagonale entgegengesetzten Winkel a und c, b und d sind gleich. Denn man ziehe die Diagonale ca, so ist vermöge des Parallelismus der Seiten cd, ba, und ad, bc < dca = cab = cad = acb, daher (I') Dreyeck cda = bca (42) folglich (II) cd = ba, bc = ad. III. Vermöge der Gleichheit der Dreyecke cda, bca ist < d = b und < cad = acb

cab = acd

daher cad + cab = acb + acd oder < c = < a

71) Anmerkung. Auf II beruht die Einrichtung der Parallel-Liniale, zwey gleiche Liniale, welche durch zwey gleich große und gleich weit voneinander entfernte Scharnire miteinander verbunden sind, Fig. 44. Man bedienet sich ihrer, Parallellinien auf dem Papier zu ziehen. Ihr Gebrauch ist eingeschränkt und unsicher, weil sich die Scharnire leicht lahm laufen.

72) Satz. Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein Rechter ist, so sind alle vier Winkel Rechte. Es sey Fig. 43. < b = R, so ist d = R vermöge (71),

ferner $b + a = 2R$ vermöge (32), folglich $a = R$ und daher auch $c = R$.

73) Aufgabe. Mit zwey gegebenen Linien a, b Fig. 45. ein Rechteck zu beschreiben. Man trage die längste der gegebenen Linien a als Grundlinie des Rechteckes auf die unbestimmte gerade Linie AB., richte an dem einen Endpunct derselben das Perpendickel AC, trage darauf die andere Linie b, und schließe das rechtwinkelichte Dreyeck ACB, diesem mache man CDB gleich, so ist ACDB das Rechteck.

Sind beyde Seiten a und b einander gleich, so verwandelt sich das Rechteck in ein Quadrat. Man kann daher auf die eben beschriebene Weise mit jeder gegebenen Linie a über jede gerade Linie AB ein Quadrat Fig. 46. beschreiben.

74) Satz. Das Perpendikel ad Fig. 47. von einem Punct a ausserhalb einer geraden Linie bc auf die Linie ist die kürzeste Entfernung des Punctes oder der Abstand desselben von der Linie. Man ziehe nach Belieben andere Linien ae, af, ag von a nach bc, so sind diese Linien die Hypotenusen in den rechtwinkelichten Dreyecken ade, adf, adg, also vermöge (52) größer als ad. Je mehr sich die Linien zu beyden Seiten von dem Perpendikel entfernen, desto größer werden sie. Denn in dem Dreyeck afg steht dem stumpfen Winkel f die größere Seite gegenüber, daher $ac > af$.

75) Satz. Zwey oder mehrere Perpendikel auf einer geraden Linie sind unter sich parallel. Dieses folgt aus (32. II.). Daher sind alle Perpendikel zwischen Parallellinien vermöge 70 einander gleich, oder Parallellinien haben überall einerley Abstand voneinander. Dieß rechtfertigt den Namen gleichlaufende Linien.

76) Anmerkung. Der vorstehende §. giebt ein bequemes Mittel, Parallellinien auf dem Felde zu ziehen.

Man fällt in einiger Entfernung auf die Linie AB, mit welcher die Parallele CD gezogen werden soll, zwey Perpendikel, macht sie gleich lang und verbindet ihre Endpuncte durch eine gerade Linie.

77) Aufgabe. Einer gegebenen vieleckigten Figur eine gleiche zu verzeichnen. Man zerfälle die Figur ABCDEF, Fig. 49. durch Diagonalen in lauter Dreyecke, so erhält man so viele Dreyecke, als die Figur Seiten hat, weniger 2, weil auf die beyden äussersten Dreyecke ABC, AFE zwey Seiten, auf jedes mittlere eine Seite der Figur kommen. Man verzeichne nach der Reihe der Dreyecke ABC, ACD, ADE, AEF, die gleiche abc, acd, ade, aef, so erhält man die gleiche Figur abcdef. Denn man lege die beyden Figuren so aufeinander, daß die gleichen Dreyecke aufeinander zu liegen kommen, so decken sich diese, also die Figuren einander, und es sind alle Linien und Winkel in den Figuren einander gleich.

78) Anmerkung. Wie Figuren auf dem Felde aufgenommen, und denselben gleiche, oder vielmehr ähnliche auf dem Papier verzeichnet werden können, wird unten gelehret. Hier noch einige Methoden, deren man sich beym Abzeichnen (Copiren) der Figuren in der Ausübung mit Vortheil bedienet.

a) Man schließe die abzuzeichnende Figur in ein Rechteck ein, dessen Seitenlinien den Umfangslinien der Figur so nahe als thunlich kommen, fälle von den Endpuncten der Figur (Fig. 50.), welche nicht selbst in den Seitenlinien des Rechtecks liegen, Perpendikel auf diese Seitenlinien, verzeichne hierauf dem Rechteck ein Gleiches, bezeichne in den Seiten desselben die Winkelpuncte der Figur, oder die von denselben eintreffende Perpendikel, gebe dem Perpendikel die gehörige Länge, so werden dadurch alle Eckpuncte der Figur abcdef bestimmt, welche man nur durch gerade Linien verbinden darf.

b) Ein anderes Verfahren, welches vorzüglich bequem ist, sehr vieleckigte oder selbst krummlinichte Figuren zu copiren, erläutert Fig. 51. Man schließet die Figur ebenfalls in ein Rechteck ein, dessen Seitenlinien in gleiche Theile getheilet, und die Theilungspuncte durch gerade Linien verbunden sind. Hierdurch entstehet ein Netz von Quadraten über der Figur. Man bemerke alle Durchschnittspuncte der Figur mit den Seitenlinien der Quadrate (die man nöthigenfalls in der Vor- und Nachzeichnung numeriret), und verbinde diese Durchschnittspuncte in dem Netz der Nachzeichnung durch Linien, so erhält man die Figur. Fallen zwischen die bemerkten Durchschnittspuncte noch merkliche Krümmungen der Figur, so muß man diese entweder nach dem Augenmaaß abzeichnen, oder man macht die Seitenlinien der Quadrate kleiner, d. i. vervielfältiget ihre Anzahl. Dieses Verfahren dienet auch, Figuren nach gegebenen Verhältnissen zu vergrößern oder zu verkleinern, wenn man den Quadraten in der Vor- und Nachzeichnung dieselbe Verhältnisse giebt. Um die Originalzeichnung nicht zu verunreinigen, verfertiget man solche Netze von Quadraten auf geöltes durchscheinendes Papier, dünnes Elfenbein oder Horn, am besten auf ebene Glastafeln, worauf die Zeichnung durch Flußspathsäure eingeätzt wird. Wegen des Verfahrens, das man hierbey zu beobachten hat, sehe man meine Abhandlung über die Bestimmung von Entfernungen auf der Erde durch das Mikrometer.

c) Am schnellsten, wiewohl mit minderer Genauigkeit, zeichnet man ab, wenn man auf die Vorzeichnung ein geöltes Papier legt, die durchscheinenden Umrisse der Figur mit Reißkohle, zartem Bleystift oder Rothstein überfähret, hierauf die bezeichnete Seite des geölten Papiers auf ein reines Blatt Papier bringt, und den durchscheinenden Umriß mit einem Stift überfähret, wobey man etwas aufdrücken muß, so drückt

sich die Figur auf dem reinen Papier, jedoch in umgekehrter Lage der Vorzeichnung ab.

d) Man befestiget die zu copirende Figur auf einem weißen Blatte Papier, sticht die Eckpuncte und alle merkliche Krümmungen der Figur durch, und verbindet die durchgezogenen Puncte in der Nachzeichnung durch Linien.

e) In einer Charte, wo viele einzelne Puncte überzutragen sind, kann man je drey Puncte mittelst eines dreyfüßigen Zirkels fassen und sie abstechen. Die vorher angeführten Methoden machen dieses letztere Verfahren ziemlich überflüßig.

79) Satz. Die Summe aller Winkel einer geradlinichten Figur ist zweymal so viel Rechten gleich, als die Figur Seiten hat weniger vier Rechten. Denn man zerfälle die Figur durch Diagonalen, so erhält man so viel Dreyecke als die Figur Seiten hat, weniger zwey. Die Summe aller Dreyeckswinkel ist gleich der Summe der Figurwinkel, woraus der Satz vermöge (37.) fließet. Es sey die Figur z. B. ein Sechseck Fig. 49., so ist die Zahl der Dreyecke 6 — 2 die Summe ihrer Winkel (6 — 2) 2 R = 12 R — 4 R.

80) Satz. Wenn man die Seiten einer Figur (Fig. 52.) alle nach einer Gegend hin verlängert, so ist die Summe aller äussern Winkel vier Rechten gleich. Denn die Summe der äussern und innern Winkel machen doppelt so viel Rechte als die Figur Seiten hat, die Summe der innern vier Rechte weniger, also die Summe der äussern, als die Ergänzung zur ersten Summe, 4 R.

81) Anmerkung. Aus den beyden vorhergehenden Sätzen erhellet, daß man, wenn die Zahl der Seiten einer Figur bestimmt ist, die Summe ihrer Winkel nicht nach Willkühr annehmen kann. Ferner geben diese beyden Sätze Mittel an die Hand, wodurch man

in der ausübenden Meßkunst untersuchen kann, ob man die Winkel einer Figur richtig bestimmt habe. Wenn die Figur einwärtsgehende Winkel wie edc Fig. 50. hat, welche größer als 2 R sind, so leidet 80. eine Ausnahme, weil hier die Summe des äussern und innern Winkels edc nicht 2 R, sondern 4 R ausmacht. Die Summe aller äussern und innern Winkel übertrifft bey Figuren mit einwärtsgehenden Winkeln die (80.) angegebene Summe um so vielmal 2 R als einwärtsgehende Winkel da sind. Die Summe der innern Winkel bleibt wie (79)., folglich übertrifft die Summe der äussern Winkel 4 Rechte und so vielmal 2 R als einwärtsgehende Winkel in der Figur sind. Z. B. Fig. 50. ist die Summe der äussern Winkel, edc als einen äussern mitgerechnet = 6 R.

IV.

Aehnlichkeit der Figuren.

82) **Satz.** Wenn zwey gerade Linien ab, ac Fig. 53. unter einem beliebigen Winkel zusammenstoßen, und man trägt auf die eine derselben eine beliebige Anzahl gleicher Theile, verbindet die Endpuncte der beyden Linien durch eine dritte bc, und zieht mit dieser durch alle Theilungspuncte der ersten 1. 2. 3. u. s. w. lauter Parallellinien, bis sie die zweyte ac schneiden, so sind die auf ac abgeschnittenen Theile auch unter sich gleich. Denn man ziehe mit ab die Parallelen Id, IIe u. s. w., so sind die kleinen Dreyecke aII, IIId, IIeIII u. s. w. alle gleich. Es ist nämlich aI = 1, 2 = Id, weil 1Id2 vermöge der Construction ein Parallelogramm, ferner ∠a = ∠dII, ∠aII = ∠12d = ∠IdII, daher das Dreyeck aII = IIId (41). Auf dieselbe Art wird die Gleichheit der Dreyecke IIId, IIIIe u. s. w. erwiesen. Daher aI, III IIII u. s. w. als gleichen Winkeln gegenüberstehende Seiten, in gleichen Dreyecken, gleich.

83) Aufgabe. Eine jede gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Die Auflösung dieser Aufgabe fließet unmittelbar aus vorstehendem Satz. Man ziehe an den Endpunct der gegebenen Linie ac eine andere ab, unter einem beliebigen, jedoch nicht allzuspitzen, Winkel, trage auf dieselbe so viel gleiche Theile von beliebiger Größe als ac enthalten soll, verbinde beyde Linien durch die dritte bc, und ziehe mit derselben lauter Parallellinien, so wird dadurch ac in eben so viel gleiche Theile getheilet, als man auf ab getragen hat.

84) Satz. Die durch die Parallelen mit bc von ac, ab abgeschnittenen Stücke Fig. 53. verhalten sich wie die ganzen Linien, oder es ist ad : ab = ae : ac
auch ad : db = ae : ec
und db = ab = ec : ac

Die Glieder der ersten Verhältnisse in den vorstehenden Proportionen sind dieselben Vielfache von aI, welche die Glieder der zweyten Verhältnisse von aI sind, daher haben die vorhergehenden und nachfolgenden Verhältnisse in jeder Proportion einerley Exponent. Man nenne z. B. aI = a. aI = b, so ist

ad : ab = 5a : 9a = 5 : 9
ae : ac = 5b : 9b = 5 : 9

Arithmetik (99) daher

ad : ab = ae : ac.

Eben so wird der Beweis für die beyden andern Proportionen geführet, welche auch aus der ersten vermöge (Arith. 100. 101.) folgen.

85) Satz. Wenn man in einem Dreyeck ABC, Fig. 54. mit der Grundlinie BC eine Parallele ab zieht, so sind die auf den Schenkeln abgeschnittenen Stücke den ganzen Schenkeln und unter sich proportional, oder

es ist $Aa : AB = Ab : AC$ 1)
$aB : AB = bc : AC$ 2)
$Aa : aB = Ab : bC$ 3)

Man theile AB in eine beliebige Anzahl gleiche Theile, und lege durch alle Theilungspuncte Parallelen mit BC, so wird BC in eben so viel gleiche Theile getheilet. Fällt nun ein Theilungspunct von AB auf a, so fällt auch einer auf b, und die Wahrheit der obigen Proportionen erhellet unmittelbar aus (84). Fällt kein Theilungspunct auf a Fig. 54, und es wäre auch nicht möglich, durch eine veränderte Theilung einen Theilungspunct auf a zu bringen, d. i. wären Aa AB zwey incommensurable Linien, welche kein gemeinschaftliches Maaß hätten, wie die Irrationalzahlen (Arithm. 76.), so läßt sich die Richtigkeit der vorstehenden Proportionen dadurch erweisen, daß man die Unmöglichkeit des Gegentheiles zeigt.

Aus 1) folgt (Arithm. 100)

$\alpha)\ AB : AC = Aa : Ab$

wir wollen setzen, diese Proportion sey nicht wahr, sondern es sey

$\beta)\ AB : AC = Ac : Ab,$

wo Ac größer oder kleiner als Aa ist; es sey Ac größer, so wird man durch eine fortgesetzte Theilung von AB gewiß auf solche kleine Theile kommen können, von welchen ein Theilungspunct d zwischen a und c fällt, man ziehe durch d die Parallele de, so hat man aus (84. und Arithm. 100)

$\gamma)\ AB : AC = Ad : Ae$

weil in der Proportion $\beta)$ das vorhergehende Verhältniß einerley mit dem vorhergehenden in $\gamma)$, so sind auch die nachfolgenden Verhältnisse in beyden Proportionen gleich, aber $Ac > Ad$ vermöge der Annahme, folglich $Ab > Ae$. Aus $\alpha)$ und $\gamma)$ folgt auf dieselbe Weise

$Ab < Ae$, dem vorigen widersprechend. Eben dieser Widerspruch entsteht, wenn man Ac kleiner als Aa setzt. Es bleibt daher nichts übrig als $Aa = Ac$, das ist die Proportion $AB : AC = Aa : Ab$ als die einzige wahre, woraus rückwärts vermöge (Arithm. 100) $Aa : AB = Ab : AC$ folgt. Ganz auf dieselbe Weise erweiset man die Proportionen 2) und 3) für incommensurable Linien.

86) **Anmerkung.** In der Ausübung kann man alle Größen für commensurabel annehmen; denn da man das Maaß nach Willkühr verkleinern kann, so kommt man sehr bald auf ein solches, welches die incommensurable Größe so genau mißt, daß der noch zurückbleibende Fehler für verschwindend angesehen werden kann, gerade so (wie man Arithm. 75.) die Irrationalzahlen durch Näherung als rationale ausdrückt.

87) **Satz.** Wenn in einem Dreyeck Fig. 54. mit der Grundlinie BC ab parallel ist, so hat man

4) $Ab : AC : ab : BC$
oder $Aa : AB : ab : BC$.

Die zweyte Proportion folgt aus 4) vermöge 1) (85) 4) selbst wird so erwiesen. Man ziehe Db parallel mit AB; so ist vermöge (85) 2) $Ab : AC = BD : BC$, aber $abDB$ ein Parallelogramm, und $BD = ab$. Schreibt man in der letzten Proportion ab statt BD, so verwandelt sie sich in 4).

Man kann in den Proportionen

1) $Aa : AB = Ab : AC$
2) $aB : AB = bC : AC$
3) $Aa : aB = Ab : bC$
4) $Ab : AC = ab : BC$

nach (Arithm. 100) die mittlern Glieder verwechseln, so entstehen daraus folgende Proportionen:

5) $Aa : Ab = AB : AC$
6) $aB : bC = AB : AC$
7) $Aa : Ab = aB : bC$
8) $Ab : ab = AC : BC$.

88) Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien a, b, c, Fig. 55. die vierte Proportionallinie zu finden. Man trage auf die beyden Schenkel eines Winkels von A nach B die Linie a, von A nach C die Linie b von A nach D, die Linie c, ziehe DE parallel mit BC, so ist AE die gesuchte Proportionallinie.

89) Anmerkung. Wenn die drey gegebenen Linien ein gemeinschaftliches Maaß haben, so lassen sie sich durch Zahlen ausdrücken, und die vierte Proportionallinie läßt sich ebenfalls mit diesem Maaße messen, also durch eine Zahl darstellen. Es sey z. B. $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, so ist die gesuchte 4te Proportionallinie 10. Eben das hätte man durch die Regel de Tri gefunden. So dienet also der vorstehende Satz auch zur Auflösung einer arithmetischen Aufgabe. Es führet die Geometrie hier weiter, als die Arithmetik, indem sie die vierte Proportionallinie genau giebt, selbst wenn sie eine incommensurable Größe wäre, also in Zahlen nur durch Näherung ausgedrückt werden könnte. Indessen würde man sehr irren, wenn man sich auch für die Ausübung von der geometrischen Construction eine größere Schärfe als von der Rechnung versprechen wollte. Denn man muß bedenken, daß unsre Linien, die wir zeichnen, nur Bilder der geometrischen sind, und daß wir sie nie scharf messen, noch ihre Durchschnittspuncte ganz genau bestimmen können. Die hierdurch zu begehenden Fehler lassen sich selbst bey der größten Sorgfalt nicht weiter vermindern, als die Gränzen unserer Sinnen es erlauben, da hingegen die Rechnung überall, wo sie die Wahrheit nicht unbedingt giebt, doch eine Annäherung ohne Ende zu derselben gestattet. Die

geome-

geometrische Construction dienet aber oft um eine Aufgabe schneller, als durch Rechnung aufzulösen, und immer dazu den Verstand des angehenden Geometers auf eine treffliche Art zu üben.

Aus (87) hat man AD : AB = DE : BC, und vermöge Arithm. (101.)

$$AD - AB : DE - BC = AD : DE$$

oder $$AD \dashv AB : AD = DE - BC : DE$$

Je kleiner daher der Unterschied zwischen AD und AB oder BD gegen AD ist, desto kleiner ist auch der Unterschied zwischen DE und BC gegen DE. Ist also jener Unterschied gegen AD sehr klein oder verschwindend, so ist es auch dieser gegen DE, und man kann DE = BC, d. i. BD mit CE ohne merklichen Fehler für parallel halten. Es sey AD = 20000 Fuß (ungefehr eine Meile Wegs) BD = 100 Fuß DE = 10 Fuß, so ist

$$DE - BC = \frac{DE.\ (AD - AB)}{AD}$$

$$= \frac{10.\ 100}{20000} = \frac{1}{20}\ \text{Fuß},$$

also BC von DE nur um einen halben Zoll verschieden, welche Größe in diesem Falle schon für 0 angesehen werden kann. Dieß ist die Ergänzung zu (34 Anmerkung).

Der Proportionalzirkel ist ein Werkzeug, welches dazu dienet, mehrere Aufgaben aus der Lehre von den Proportionen, auf eine theils geometrische, theils mechanische Art schnell aufzulösen. Zwey Liniale Fig. 56. sind vermittelst eines Scharnieres so mit einander verbunden, daß sie zusammengelegt in eine parallele Lage gebracht, und unter jedem Winkel geöffnet werden können. In dieser letztgenannten Lage bilden sie immer ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Spitze sich in dem Mittelpuncte des Scharnieres befindet. Auf die beiden

Schenkel des Winkels acb sind von c aus gleiche Theile getragen (linea partium aequalium). Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden, trage man die erste der gegebenen Linien von c nach d und d', fasse die zweyte in den Zirkel und steche sie von d nach d' ab, indem man die Schenkel des Proportionalzirkels öffnet oder schließet, hierauf trage man die dritte der gegebenen Linien von c nach e und e', so ist ee' die gesuchte vierte Proportionale. Denn es ist dd' parallel mit ee', weil cd = cd' ce = ce'; daher cd : dd' = ce : ee'. Die Linie der gleichen Theile des Proportionalzirkels dienet ferner eine gegebene Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. Man fasse die theilende Linie mit dem Zirkel, und steche sie auf dem Proportionalzirkel (dem man die gehörige Oeffnung giebt) von derjenigen Zahl zur gegenüberstehenden, welche die Menge der Theile in der zu theilenden Linie angiebt, oder ein gewisses Vielfache derselben, wenn die Schenkel des Proportionalzirkels für die einfache Zahl nicht weit genug geöffnet werden könnten. Hierauf steche man von 1 zu 1, 2 – 2, 3 – 3, oder den gehörigen Vielfachen dieser Zahlen, so erhält man 1, 2, 3 der gesuchten Theile der Linie. Z. B. man soll eine Linie in 13 gleiche Theile theilen. Da 13. 10 = 130, so steche man die Linie von 130 zu 130 ab, und hierauf bey ungeänderter Oeffnung des Proportionalzirkels von 1. 10 = 10 zu 10, 20 zu 20 u. s. w. um 1, 2 u. s. w. Theile zu erhalten. Dieß ist ein vorzüglicher Gebrauch des Proportionalzirkels. Andere Anwendungen desselben sollen in der Folge erläutert werden.

90) Erklärung. Aehnliche Figuren sind solche, deren Theile unter sich und zum Ganzen einerley Verhältniß und Lage haben, und sich durch nichts als ihre Größe von einander unterscheiden. Hierzu wird erfordert, daß alle Winkel in ähnlichen Figuren nach einerley

Ordnung einander gleich, und die an den gleichen Winkeln liegenden Seiten proportional sind.

91) Anmerkung. Im gemeinen Leben wird oft der Ausdruck ähnlich und gleich verwechselt, doch nicht leicht die Begriffe. Wenn man z. B. sagt, das Kind sieht dem Vater gleich, so will man dadurch offenbar nicht Gleichheit in der Größe, sondern bloß in den Verhältnissen der Theile des Körpers und der Gesichtsbildung anzeigen. Der Begriff von mathematischer Gleichheit, d. i. von unbedingter Uebereinstimmung eines Dinges mit dem andern schließet den Begriff von Aehnlichkeit in sich, aber nicht umgekehret. Eben so kann Gleichheit in der Größe ohne Aehnlichkeit statt finden, wie wenn ein Dreyeck einem Viereck an Größe gleich ist, (welches wie die Folge lehren wird, sehr wohl statt finden kann). Diese Art der Gleichheit, ohne Aehnlichkeit zu bezeichnen, werde ich mich des Ausdrucks gleich groß bedienen.

92) Satz. Wenn man in einem Dreyeck Fig. 54. mit einer Seitenlinie BC eine Parallele ab zieht, so ist das Dreyeck Aab dem ABC ähnlich. Denn es ist $< A = A$, $a = B$, $b = C$ (32), und die an dem gleichen Winkel liegenden Seiten proportional vermöge (85. 87.).

93) Satz. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern gleich sind, so sind die Dreyecke ähnlich. Aus der Gleichheit zweyer Winkel fließet auch die Gleichheit des dritten. Es ist also nur zu erweisen, daß die an den gleichen Winkeln liegenden Seiten proportional sind. Es seyen in den beyden Dreyecken, Fig. 54. und Fig. 54. *. $< a = < B$, $< b = < C$, also $< c = < A$. Man lege das kleinere Dreyeck so auf das größere, daß die gleichen Winkel c und A auf einander kommen, so fällt ca nach Aa, cb nach Ab, und weil vermöge der An-

nahme a = B, b = C, so ist ab parallel mit BC (32), und es fließet die Proportionalität der Seiten und die Aehnlichkeit der Dreyecke aus (92).

94) Satz) Wenn in zweyen Dreyecken ein Winkel gleich, und die den gleichen Winkel einschliessenden Seiten proportional sind, so sind die Dreyecke ähnlich. Es seyen in den Dreyecken Fig. 54. u. 54** < c = A und ca : ab = AB : AC. Man schneide auf den Schenkeln AB des größern Dreyecks ein Stück Aa = ca ab, und ziehe durch a die Parallele ab mit BC, so ist das Dreyeck Aab ähnlich ABC (85), und AB : AC = Aa : Ab, vermöge der Annahme AB : AC = ca : cb und ca = Aa, oder die zwey ersten Glieder in beyden Proportionen gleich, daher kann das vierte nicht verschieden seyn, und es ist Ab = cb. Folglich sind die Dreyecke cab, Aab vermöge (39) gleich und cab ABC ähnlich, weil Aab es ist.

95) Satz. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Paar Seiten proportional sind, so sind die Dreyecke ähnlich. Es sey Fig. 54. AB : AC = ca : cb, und AB : BC = ca : ab. Man schneide auf AB, Aa = ca ab, und ziehe ab mit BC parallel, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke Aab, und ABC.

AB : AC = Aa : Ab mit
AB : AC = ca : cb verbunden giebt
da Aa = ca ist, Ab = cb, ferner ist
AB : BC = Aa : ab mit
AB : BC = ca : ab verbunden giebt
ab = ab im Dreyeck Aab, daher die Dreyecke cab, Aab gleich, und cab, ABC ähnlich.

96) Satz. In ähnlichen Dreyecken sind die den gleichen Winkeln gegenüberstehende Seiten proportional; denn jede Seite, welche zwischen zwey gleichen Winkeln anliegt, steht zugleich dem dritten Winkel,

welcher durch die beyden der Seite anliegenden bestimmt wird, und also dem dritten Winkel im andern Dreyeck gleich ist, gegen über. Man nennt solche Seiten ähnlicher Figuren, welche proportional sind, **gleichnamige Seiten.**

97) **Aufgabe.** Einem Dreyeck ein ähnliches zu verzeichnen. Diese Aufgabe läßt vermöge der drey Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke (93. 94. 95.) dreyerley Auflösungen zu:

a) Man mache die zwey Winkel a, b, des einen Dreyecks zweyen Winkeln B, C des andern gleich, oder

b) man mache einen Winkel a = B und suche zu AB, BC und einer willkührlich angenommenen, oder gegebenen Linie ca die vierte Proportionallinie, trage dieselbe nach ab, so ist dadurch das Dreyeck abc bestimmt.

c) Man suche zu AB, BC, ca die vierte Proportionale ab, und zu AB, AC, ca die vierte Proportionale cb, und verzeichne das Dreyeck abc vermittelst dreyer Seiten.

98) **Anmerkung.** Die letzte Art, ähnliche Dreyecke zu verzeichnen, ist in der Ausübung die richtigste, und nicht minder bequem als die übrigen, wenn man die Seiten des gegebenen Dreyecks mißt, und den Seiten des ähnlichen nach einem größern, oder kleinern Maaßstab dasselbe Maaß giebt, wodurch sie von selbst den Seiten des gegebenen Dreyecks proportional werden. Die Aufgabe: einem gegebenen Dreyeck ein ähnliches zu verzeichnen, heißt **unbestimmt**, weil die Auflösung mehrere (unzählig viele) Werthe zuläßt, je nachdem man eine Seite des zu zeichnenden Dreyecks nach Willkühr annimmt, oder den Maaßstab verändert. Von einem Dreyeck ein ihm ähnliches Stück abzuschneiden, ziehe man mit einer Seitenlinie eine Parallele. Der ähnlichen Stücke lassen sich von einem Dreyecke unzäh-

lig viele abschneiden, weil sich zwischen einer Seitenlinie und der gegenüberliegenden Spitze des Dreyecks unzählig viele Parallelen ziehen lassen.

99) Satz. Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyeck ABC Fig. 57. von dem rechten Winkel auf die gegenüberstehende Seite ein Perpendikel fällt, so wird dadurch das rechtwinklichte Dreyeck in zwey unter sich und dem ganzen ähnliche Dreyecke getheilet. Es sey BD dieses Perpendikel, so haben die Dreyecke ABD, ABC den Winkel A gemein und die Rechten gleich, die Dreyecke CBD und ABC den Winkel C gemein und die Rechten gleich, daher $\angle ABD = C$, $\angle DBC = A$, und die Dreyecke ADB, BDC, ABC vermöge (93) ähnlich, und die gleichnamigen Seiten proportional. Hieraus fließen folgende Proportionen:

1) AD : DB = DB : DC das Verhältniß der Katheten in den beyden Theilen des ganzen Dreyecks.

2) AD : AB = AB : AC das Verhältniß des kleinern Katheten zur Hypotenuse in einem Theil und dem ganzen Dreyeck.

3) DC : BC = BC : AC das Verhältniß des großen Katheten zur Hypotenuse in einem Theil und dem ganzen Dreyeck. Die drey Proportionen sind stetige, in welchen die mittlern Glieder gleich sind.

100) Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz findet eine häufige Anwendung, um mittlere geometrische Proportionallinien durch Construction zu finden, die aber erst weiter unten erläutert werden kann.

101) Aufgabe. Einer jeden gegebenen geradlinichten Figur eine ähnliche zu verzeichnen. Man zerfälle die gegebene Figur ABCDE Fig. 58. durch Diagonalen in lauter Dreyecke, verzeichne denselben ähnliche, und gebe ihnen eine ähnliche Lage, so entsteht dadurch die Figur abcde, welche der gegebenen

ABCDE ähnlich ist. Aus der Gleichheit der Winkel in den ähnlichen Dreyecken folgt die Gleichheit der Winkel in beyden Figuren, nach der Ordnung, wie sie mit einerley Buchstaben bezeichnet sind. Ferner ist vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke

$$ABC, abc, AB : BC = ab : bc \quad (1$$

und

$$BC : AC = bc : ac \quad (2$$

vermöge der Aehnlichkeit von ACD, acd

$$AC : CD = ac : cd \quad (3$$

3) mit 2) zusammengesetzt (Arithm. 110.) giebt

$$BC : CD = bc : cd.$$

Ganz auf dieselbe Weise folgt aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ACD, acd, ADE, ade. CD : DE = cd : de, und so rund herum wird erwiesen, daß die an gleichen Winkeln in beyden Figuren liegenden Seiten proportional, also die Figuren ähnlich sind.

In ähnlichen Figuren sind die Seiten nicht blos nach der oben erwiesenen Ordnung proportional, sondern überhaupt ähnlich liegende Seiten sind proportional. Denn aus den Proportionen

$$AB : BC = ab : bc$$
$$BC : CD = bc : cd$$

fließet durch Zusammensetzung der Verhältnisse

$$AB : CD = ab : cd$$

ferner aus

$$BC : CD = bc : cd$$
$$CD : DE = cd : de$$
$$\overline{BC : DE = bc : de} \text{ und weil}$$
$$AB : BC = ab : bc$$
$$\overline{AB : DE = ab : de} \text{ u. s. w.}$$

102) Satz. Eine andere Art, einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen, ist folgende: Man nehme innerhalb der Figur ABCD Fig. 59. einen Punct E, und zerfälle aus demselben die Figur in lauter Dreyecke, lege um einen andern Punct e, den Dreyecken EAB, EBC u. s. w. ähnliche eab, ebc u. s. w. so wird dadurch die ähnliche Figur abcd bestimmt. Der Beweiß ist wie in dem vorhergehenden Satz. Die Puncte E, e in beyden Figuren heißen ähnlich liegende, weil aus ihnen die Figuren in ähnliche Dreyecke zerfällt werden können. Soll die ähnliche Figur innerhalb der gegebenen verzeichnet werden, so nehme man auf einer der Seitenlinien AB Fig. 58. die Seite Ab, oder auf einem der Schenkeln EA der Dreyecke Fig. 59. Ea der ähnlichen Figur, und ziehe mit allen Seitenlinien der Figur die Parallelen bc, cd, de Fig. 58. ab, bc, cd, da Fig. 59. so ergeben sich die ähnlichen Figuren.

103) Aufgabe. In einer Figur abcd, welche einer andern ABCD Fig. 59. ähnlich ist, einen Punct e zu bestimmen, welcher dem E der andern Figur ähnlich liegend ist. Man ziehe von dem Punct E nach den Endpuncten einer Seitenlinie der Figur gerade Linien EA, EB und verzeichne dem dadurch bestimmten Dreyeck AEB, ein ähnliches aeb über der gleichnamigen Seite der andern Figur ab, so ist der Punct e mit E ähnlich liegend. Denn man zerfälle von E und e die Figuren in lauter Dreyecke, so hat man vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke AEB, aeb

$$AB : EB = ab : eb$$

vermöge der Aehnlichkeit der Figuren

$$BC : AB = bc : ab$$

beyde Proportionen zusammengesetzt geben

$$BC : EB = bc : eb$$ ferner ist

$\angle EBC = ebc$ weil $ABC = abc$ und $ABE = abe$ daher Dreyeck EBC ähnlich ebc (94). Aus der Aehn-

lichkeit der Dreyecke EBC, ebc und der Aehnlichkeit der Figuren, wird auf dieselbe Art die Aehnlichkeit von DEC, dec dargethan, und so rund um den Punct e herum sind alle Dreyecke den um E herum liegenden ähnlich, daher die Puncte E, e selbst ähnlich liegend. Es erhellet, daß man in zwey ähnlichen Figuren mehrere, ja unzählich viele ähnlich liegende Puncte bestimmen kann, wenn man sie als die Spitzen ähnlicher Dreyecke betrachtet, deren Grundlinien auf ähnlich liegenden Seiten der Figuren aufstehen. Wenn man zwey ähnlich liegende Puncte in ähnlichen Figuren durch eine gerade Linie verbindet, so sind die ganzen Linien in beyden Figuren ähnlich liegend, denn ihre Lagen sind durch ihre Endpuncte bestimmt.

104) Satz. Aehnlich liegende Linien EF, ef in ähnlichen Figuren ABCD, abcd Fig. 60. haben nicht blos einerley Lage, sondern auch einerley Verhältniß gegen die Umfangslinien in beyden Figuren. Man ziehe von den Endpuncten EF, ef nach einer ähnlich liegenden Seite in beyden Figuren die Linien EA, EB, FA, FB; ea, eb, fa, fb, so sind die Dreyecke EAB, FAB und eab, fab vermöge der Voraussetzung ähnlich, daher $<EAF = eaf$, denn es sind die Unterschiede von den gleichen Winkeln EAB; FAB und eab, fab; weiter hat man

$$EA : AB = ea : ab$$
$$AB : FA = ab : fa \text{ daher}$$
$$EA : FA = ea : fa,$$

also die Dreyecke EAF, eaf ähnlich (93) und

$$EF : AE = ef : ae \text{ aber auch}$$
$$AE : AB = ae : ab \text{ also}$$
$$EF : AB = ef : ab,$$

welches zu erweisen war. Auf dieselbe Art wird der Beweis für jede andere Seitenlinie in beyden Figuren geführt. Wenn man von den Endpuncten der Linien

EF, ef nach den Eckpuncten in beyden Figuren gerade Linie zieht, so entstehen dadurch lauter ähnliche Dreyecke, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie und ihre Spizzen in den Winkelpuncten der Figuren haben. Dieß giebt noch eine dritte Art, einer Figur eine ähnliche zu verzeichnen. Man nehme innerhalb der Figur, welcher man eine ähnliche verzeichnen soll, eine Linie EF willkührlich an, ziehe von ihren Endpuncten nach allen Winkelpuncten der Figur gerade Linien, und messe die Winkel, welche diese Linien mit EF machen, ziehe eine andere ef von willkührlicher Größe, lege an die Endpuncte derselben die an E und F gemessenen Winkel, so bestimmen sich durch die Durchschnitte ihrer Schenkel ed, fd, ec, fc; eb, fb, ea, fa, alle Winkelpuncte, folglich die ganze ähnliche Figur abcd.

105) **Anmerkung.** Auf der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren beruht ein großer Theil der Feldmeßkunst und der ausübenden Geometrie überhaupt. Figuren aufnehmen und in Grund legen, heißt so viel, als zu ihrer Bestimmung nöthig ist, auf dem Felde messen, und ihnen ähnliche auf dem Papier verzeichnen. Man verfähret dabey meistens nach einer der drey angegebenen Methoden. Wenn man mit keinem Winkelmesser versehen ist, so mißt man alle Seiten und Diagonalen der Figur, und verzeichnet ihr nach einem verkleinerten Maasstab eine ähnliche auf dem Papier nach (101). Dieses Verfahren ist zwar sehr zuverläßig, aber unbequem. Wenn man in die Figur kommen und einen solchen Punct wählen kann, von dem man nach allen Endpuncten sehen und messen kann, so verfähret man nach (102). Hierzu ist das Meßtischchen vorzüglich bequem, da man ohne es zu verrücken, alle um E liegende Winkel nehmen, und nachdem man die Linien EA, EB, EC, ED gemessen hat, dieselbe nach einem verjüngten Maasstab von dem Puncte e aus auf

dem Meßtischchen auftragen kann, die dadurch bestimmten Eckpuncte abcd, durch gerade Linien verbunden, geben gleich auf dem Felde die ähnliche Figur auf dem Papier. Man nennt diese Methode das Aufnehmen einer Figur aus einem Stande. Reicht ein Standpunct nicht hin, um daraus alle Winkelpuncte einer Figur aufnehmen zu können, so verfähret man nach (103). Es kommt dabey sehr viel auf die Wahl der Standlinie EF an, damit man sie nicht nur ungehindert messen kann, sondern daß auch die Dreyecke, wodurch die Eckpuncte der Figur bestimmt werden, keine zu spitze Winkel erhalten, indem sonst die Durchschnittspuncte ihrer Schenkel nicht scharf angegeben werden können. Dieses Verfahren gewähret in der Ausübung den großen Vortheil, daß man nur eine Linie auf dem Felde zu messen braucht, und die übrigen alle durch Zeichnung, oder (wie unten die Trigonometrie lehret) durch Rechnung finden kann. Es ist daher diese Methode zur Aufnahme ganzer Gegenden vorzüglich brauchbar. Einzelne Puncte innerhalb einer Figur verzeichnet man entweder ebenfalls aus der angenommenen Standlinie, oder wenn man die Figur schon bestimmt hat, dadurch, daß man von irgend einer Seitenlinie der Figur die Winkel nach dem Punkt mißt, und ihnen gleiche auf derselben Seite in der ähnlichen Figur verzeichnet. Oft kann man keinen Standpunct innerhalb einer Figur wählen, z. B. wenn man einen Wald, eine sumpfigte Gegend, oder einen See aufnehmen sollte. Man misset alsdann die Seiten und Winkel am Umfang der Figur, und verzeichnet die ihr ähnliche nach (101). Denn aus AB, BC Fig. 58. und dem $\angle B$ bestimmt sich das Dreyeck ABC, also die Seite AC und $\angle ACB$, diesen Winkel von C abgezogen, giebt $\angle ACD$, und das Dreyeck ACD durch die Seiten AC, CD und den eingeschlossenen Winkel. EAD kann aus der Seite AD und den anliegenden Winkeln verzeichnet werden,

wodurch sich die Seitenlinien DE, EA und der eingeschlossene Winkel E von selbst bestimmen. Hat man sie ebenfalls gemessen, so dienet dieß der Arbeit zur Probe. Man nennt solche Linien und Winkel, die man zum Ueberfluß misset, **Correctionslinien** und **Winkel**. Es ist zu bemerken, daß bey der Aufnahme einer Figur aus dem Umfang der Fehler, welcher bey der Messung einer Seite oder eines Winkels begangen worden ist, auf die Bestimmung der übrigen Seiten und Winkel Einfluß hat, und daß daher dieses Verfahren bey Figuren, wo viele Seiten und Winkel zu messen sind, leicht eine Anhäufung von Fehlern verursacht. Man muß daher dieses Verfahren bey vielseitigen Figuren nur alsdann anwenden, wenn kein anderes statt findet, und überall, wo es die Umstände erlauben, eine Diagonale messen, oder wenigstens die Winkel derselben BCA, CDA u. s. w. mit den Umfangslinien messen, weil man dadurch die ganze Figur in mehrere Theile oder kleinere Figuren zerlegt, wovon jede besonders verzeichnet werden kann, und daher die Fehler der einen sich nicht in die andern fortpflanzen. Figuren, deren Umfang man nicht unmittelbar messen kann, oder welche krummlinicht sind Fig. 61., schließet man in geradlinichte ein, nimmt die letztern nach dem nur beschriebenen Verfahren auf, und bestimmt die Puncte des Umfangs der eingeschlossenen Figur durch Perpendikel auf die Seitenlinien der einschließenden Figur, oder durch Dreyecke, wie abc nach (103).

Bey dem Aufnehmen der Figuren auf dem Felde können vielerley Schwierigkeiten vorkommen, welche zu erzählen hier gar nicht der Ort ist. Man muß sich deßfalls in ausführlichen Schriften über die practische Geometrie (wie das §. 6. angeführte) Raths erholen. Indessen lernt man die Schwierigkeiten bey einiger erworbenen Fertigkeit in den Arbeiten der Feldmeßkunst,

wenn man mit den nöthigen Kenntnissen ausgerüstet ist, leicht überwinden, während sie dem handwerksmässigen Feldmesser unübersteigliche Hindernisse bleiben.

106) Anmerkung. Zum Schlusse dieses Abschnitts füge ich noch einige andere Methoden, als die (85.) erwähnte, Linien in gleiche und ungleiche Theile zu theilen, bey. Sie gründen sich auf die in dem Abschnitte und den vorhergehenden vorgetragenen Lehrsätze, und dienen ausser dem unmittelbaren Nutzen, welchen sie dem Künstler und ausübenden Geometer leisten, dem Anfänger zur Uebung in der geometrischen Construction. Die leichteren Arten setze ich ohne Beweis her und führe nur die Sätze an, aus denen er hergeleitet werden kann.

Eine Linie in jede gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 62.

1) Man ziehe durch die Endpuncte der zu theilenden Linie AB zwey Parallelen BC, CD, und trage auf die andere von A aus, so viel gleiche Theile als AB enthalten soll, weniger einen, verbinde die Theilungspuncte 14, 23, 32, 41, so ist geschehen, was man verlangte (70. 82.).

2) Man ziehe an die Linie AB Fig. 63. eine BE unter einen beliebigen Winkel, durch einen Punct D derselben die Parallele DC, trage auf diese so viel gleiche Theile als AB enthalten soll, durch den letzten Theilungspunct ziehe man die Linie AC, bis sie BE in E schneidet, und von E aus gerade Linien durch alle Theilungspuncte bis nach AB (87. und Arithm. 94.).

3) Man verbinde zwey Parallellinien AB, CD durch eine dritte AC, und ziehe mit AC lauter Parallelen in gleicher Entfernung. Die zu theilende Linie fasse man in den Zirkel und beschreibe damit von C oder A aus einen Kreisbogen, wo derselbe eine der Paralle-

len schneidet, ziehe man nach E, AE, so enthält diese Linie die gesuchten Theile (87.). Begreiflich kann die vorstehende Aufgabe auch auf eine mechanische Weise nach dem Augenmaaß aufgelöset werden, welches oft in der Ausübung der kürzeste Weg ist. Dabey ist folgendes zu bemerken. Halbirungen kann man unter allen Theilungen am leichtesten nach dem Augenmaaß bewerkstelligen, nach ihnen Theilung in drey. Ueberhaupt ist die Theilung desto leichter, je kleiner die Anzahl der Theile ist. Daraus fließet folgende Regel: gerade Theilungen bewerkstellige man durch Halbirungen so lange es geht, z. B. 16 theile man durch eine 4fache Halbirung, 2, 4, 8, 16; ungerade Theilungen zerfälle man in kleinere, wenn die Zahl der Theile keine Primzahl ist, z. B. 15 theile man durch die doppelte Theilung 3 und 5. Die größten Schwierigkeiten machen die Theilungen nach Primzahlen, vorzüglich wenn sie groß sind. Schneidet man von einer Primzahl eins ab, so bleibt eine gerade Zahl übrig, welche man durch Halbirung in kleinere zerfällen, und so leichter theilen kann. Z. B. man sollte eine Linie in 17 Theile theilen, könnte man $\frac{1}{17}$ der Linie abschneiden, so würden sich die übrigen 16 durch lauter Halbirungen finden lassen. Daher ist folgende Aufgabe von practischem Nutzen. Von einer gegebenen Linie AB Fig. 65. irgend einen ungeraden Theil $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ abzuschneiden. Man setze eine Linie AC = AB unter einem beliebigen Winkel an A, verlängere die Grundlinie des gleichschenkelichten Dreyecks CB nach D, und mache BD = CB. Man halbire AC in g und ziehe Dg, so ist Bf = $\frac{1}{3}$ AB. Ueberhaupt theile man AC in so viel Theile als herauskommen, wenn man zum ungeraden Nenner des Bruches, welcher von AB abgeschnitten werden soll, eins addiret und halbiret. Z. B. für $\frac{1}{3}$ theilet man AC in $\frac{5+1}{2} = 3$ Theile, oder trägt das schon gefundene $\frac{1}{3}$

von AB herüber auf AC, für $\frac{1}{17}$ AB theilet man AC in $\frac{17+1}{2} = 9$ Theile, und zieht von $\frac{1}{9}$ nach D eine gerade Linie, so schneidet dieselbe $\frac{1}{17}$ AB ab. Die geraden Theile können auf AC durch lauter Halbirungen bestimmt, die ungeraden von AB herübergetragen werden. Der Beweiß hiervon erhellet also. Man ziehe BE parallel mit CA, so sind die Dreyecke Bef, FgA, Bac, cAd wegen der Gleichheit ihrer Winkel ähnlich, und daher die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten proportional. Daher

1) Be : Ag = Bf : Af
2) Ba : Ad = Bc : Ac

aber wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke DBe, DCg, und DBa, DCd, Be = $\frac{1}{2}$ Cg = $\frac{1}{4}$ AC und Ba = $\frac{1}{2}$ Cd = $\frac{1}{18}$ AC (87.), Ag = $\frac{1}{2}$ AC, Ad = $\frac{8}{9}$ AC = $\frac{16}{18}$ = AC. Setzt man diese Werthe in den Proportionen 1) und 2), so erhält man aus 1)

$\frac{1}{4}$ AC : $\frac{1}{2}$ AC = Bf : Af
1 : 2 = Bf : Af
Af = 2Bf, und Bf = $\frac{1}{3}$ AB

ferner aus 2)

$\frac{1}{18}$ AC : $\frac{16}{18}$ AC = Bc : Ac
1 : 16 = Bc : Ac
Ac = 16 Bc, und Bc = $\frac{1}{17}$ AB.

Auf dieselbe Weise wird der Beweis für alle auf BA abgeschnittenen Theile geführet. In Adams (23. Anmerkung) angezogenem Werk findet man mehrere Auflösungen der vorstehenden Aufgabe jedoch ohne Beweis. Eine Linie in ungleiche Theile zu theilen, die ein gegebenes Verhältniß gegeneinander haben, bediene man sich eines der eben beschriebenen Verfahren, Linien in gleiche Theile zu theilen, nur trage man auf die Hülfslinien, statt der gleichen Theile, das gegebene Verhältniß der Theile.

Wenn man mehrere Linien auf einerley Art einzutheilen hat, z. B. bey Verfertigung von Maaßstäben, Verkleinerungen von Rissen und dergleichen, so ist folgendes Verfahren in Ermangelung eines Proportionalzirkels sehr bequem. Man trage die Theilung auf eine gerade Linie AB, Fig. 66., beschreibe mit derselben ein gleichseitiges Dreyeck, und ziehe von der Spitze desselben C nach den Theilungspuncten gerade Linien. Will man eine andere Linie de nach diesem Verhältniß theilen, so fasse man die Linie mit dem Zirkel, trage sie auf die beyden Schenkel des Dreyecks von seiner Spitze aus nach ce, cd, und verbinde de, so ist dieß in dem Verhältniß von AB getheilet (87).

V.

Vergleichung der geradlinichten Figuren und Ausmessung derselben.

107) Satz. Parallelogramme, welche einerley Grundlinie haben und zwischen zwey Parallellinien enthalten sind, sind einander gleich. Es seyen (Fig. 67.) ABCD ABEF, zwey Parallelogramme über einer Grundlinie AB und zwischen den Parallelen AB, DE. Hierbey können dreyerley Lagen des einen Parallelogramms gegen das andere statt finden. Entweder schneidet

I. Die Seite AF des einen, die Seite BC des andern in d, oder

II. Sie macht die Diagonale des andern AC aus, oder

III. Sie fällt innerhalb des Parallelogramms BACD.

Beweis für I. $DC = AB = FE$, $DA = BC$, $AF = EB$ als gegen über stehende Seiten von Parallelogrammen, daher $DC + FC = FE + FC$ oder

DF

DF = CE, und in den beyden Dreyecken DAF, CBE die drey Seiten gleich, folglich die Dreyecke. Man nehme von beyden Dreyecken dCF weg, und setzte AdB zu, so erhält man die beyden Parallelogramme, welche daher ebenfalls gleich sind.

Für II. Dreyeck ADC=ACB=BCF (70) daher Parallelogramm ABCD = ABEC.

Für III. AD=BC, AF=BE, DC=AB = FE, und DF=DC—FC=CE=EF—FC, daher Dreyeck DAF = CEB; folglich Parallelogramm ABCD=ABEF.

108) Satz. Die Höhe eines Parallelogramms heißt das Perpendikel EH, welches man von einer Grundlinie desselben zur gegenüberstehenden, oder auf deren Verlängerung fällt. Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so ist die Seite CB selbst die Höhe. Weil alle Perpendikel zwischen Parallellinien einander gleich sind, so kann man den vorhergehenden Satz auch so ausdrücken: Parallelogramme auf einerley Grundlinie und von gleichen Höhen sind gleich. Oder noch allgemeiner: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. Denn man kann sie alsdenn immer so verzeichnet denken, daß sie eine gemeinschaftliche Grundlinie bekommen und zwischen zwey Parallellinien fallen.

109) Satz. Dreyecke, welche einerley Grundlinie, und ihre Spitzen in einer mit der Grundlinie parallelen Linie haben, oder II. Dreyecke von einerley Grundlinie und Höhe, oder III. von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich.

ABC, ABD Fig. 68. seyen zwey Dreyecke über einer Grundlinie und zwischen zwey Parallellinien; man ziehe mit ihren Seiten AC, AD Parallelen, so erhält man zwey Parallelogramme, welche vermöge (107.)

gleich sind. Die Dreyecke machen die Hälften von diesen Parallelogrammen aus (70); daher sind sie ebenfalls gleich. Die übrigen beyden Sätze sind Folgen des ersten; denn Höhe eines Dreyecks heißt das Perpendikel von dessen Spitze auf die Grundlinie oder deren Verlängerung.

110) Satz. Aus (107.) und (109.) folgt, daß der Inhalt allein weder ein Dreyeck noch ein Parallelogramm bestimmt, und die Aufgabe: ein Parallelogramm oder ein Dreyeck von gegebenem Inhalte zu verzeichnen, gehöret daher unter die unbestimmten Aufgaben.

111) Aufgabe. Ein Parallelogramm ABEF (Fig. 67.) in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel hat. Man richte über der Grundlinie des Parallelogramms AB den gegebenen Winkel BAD auf, ziehe mit AD die Parallele BC, so ist geschehen, was man verlangte. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so wird das Parallelogramm in ein Rechteck verwandelt.

112) Aufgabe. Ein Dreyeck ABC (Fig. 68.) in ein ihm gleich großes Parallelogramm zu verwandeln. Man halbire die Grundlinie des Dreyecks in F, ziehe mit der Grundlinie durch die Spitze, und mit einer der Seiten AC durch F eine Parallellinie, so ist AFEC das gesuchte Parallelogramm. Denn $AFEC = \frac{1}{2}\,ABHC = ABC$. Vermöge dieser und der vorhergehenden Aufgabe kann jedes Dreyeck in ein gleich großes Rechteck verwandelt werden.

113) Satz. Man ziehe in einem Parallelogramm ABCD Fig. 69. durch einen ausser der Mitte liegenden Punct der Diagonale E, die Parallelen, FG, IH mit den Seiten des Parallelogramms, so wird dasselbe in vier kleinere Parallelogramme getheilet, wovon die beyden, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich groß, die beyden andern, welche von der Diagonale geschnit-

ten werden, ungleich, aber unter sich und dem ganzen Parallelogramm ähnlich sind.

Die Dreyecke ABD, BDC; EFB, EBH; IED, EDG, sind vermöge (70) gleich, daher das Parallelogramm AFEI gleich dem Parallelogramm EHGC, weil jenes = ABD — IED — EFB, dieses = BDC — EDG — EBH. In den Parallelogrammen ABCD, FBHE, IEGD sind die Winkel gleich, denn D = E = B, (70. 29.) H = C = G = I = F, und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke BEH, BCD, DGE, (87) BH : HE = BC : CD = EG : DG; daher die von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme unter sich und dem Ganzen ähnlich. Wenn das ganze Parallelogramm ein Rechteck ist, so sind die kleinern Parallelogramme ebenfalls Rechtecke, und wenn es ein Quadrat ist, so wird dasselbe durch das vorgeschriebene Verfahren in zwey ungleiche Quadrate, über den Seiten IE, EH = DG, GC, und zwey gleichen Rechtecken, deren Grundlinie die Seite des einen, und deren Höhe die Seite des andern Quadrates ist, getheilet. Aus der Proportion

BH : EH = EG : DG oder
FE : EH = EG : IE erhellet,

daß von gleich großen und gleichwinklichten Parallelogrammen die Seiten des einen, die mittleren Proportionallinien zwischen den Seiten des andern sind.

114) Aufgabe. Ein Parallelogramm in ein anderes von gleichem Inhalt zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel, und eine gegebene Seite hat. Das schiefe Parallelogramm a Fig. 70. soll z. B. in ein Rechteck, welches die Seite b hat, verwandelt werden. Man verwandle das Parallelogramm a zuerst in ein Rechteck, welches mit ihm eine Seite gemein hat, nach (111), und dieses auf folgende Art in ein anderes mit der gegebenen Seite b. AFEI Fig. 69. sey das zu verwan-

delnde Rechteck, welches dem Parallelogramm a gleich ist. Man verlängere die Seiten des Rechtecks AF, AI nach B und D, trage von F nach B die gegebene Seite b. Fig. 70. ziehe durch B, E eine gerade Linie, bis sie die Verlängerung von AI in D schneidet, und beschreibe das dem Dreyeck BAD gleiche BCD, indem man BC = AD, DC = AB macht. Hierauf verlängere man auch die Seiten IE, FE des Rechtecks, bis sie in G und H, in DC, CB einschneiden, so ist EGCH das gesuchte Rechteck, welches die gegebene Seite b = FB = EH hat. Der Beweis folgt aus (113).

115) Anmerkung. Vermöge des vorstehenden Satzes läßt sich jede geradlinichte Figur in ein Rechteck verwandeln. Denn man zerlege die Figur durch Diagonalen in lauter Dreyecke und verwandle jedes Dreyeck nach 109. in ein gleich großes Parallelogramm, und alle diese Parallelogramme nach (114) in Rechtecke, welche eine gemeinschaftliche Seite haben, so kann man die Rechtecke mit der gemeinschaftlichen Seite, so an einander legen, daß sie zusammen genommen ein Rechteck ausmachen, welches der gegebenen Figur gleich ist. (Fig. 71.) sind die mit einerley Ziffern bezeichneten Dreyecke, und Rechtecke in beyden Figuren gleich. Jedes Rechteck läßt sich in ein gleich großes Quadrat verwandeln, wenn man zwischen den ungleichen Seiten desselben die mittlere geometrische Proportionallinie sucht, und diese zur Seite des Quadrats nimmt (113.) Hieraus erhellet, wie es möglich sey, jede gegebene geradlinichte Figur in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln. Man nennt dieses die Quadratur der Figuren. Bey krummlinichten Figuren ist sie nicht so leicht zu bewerkstelligen. Von der Quadratur des Kreises unten. Die Verwandlung der Figuren hat in der ausübenden Geometrie den Nutzen, daß man den Inhalt irregulärer Figuren dadurch leicht berechnen und nach gegebenen

(179)

Verhältnissen in gleiche oder ungleiche Theile theilen kann. Das Verfahren (112) zeigt zwar allgemein die Möglichkeit, jede geradlinichte Figur in ein Rechteck von einer gegebenen Seite zu verwandeln. Es ist aber dasselbe in der Ausübung unbequem, weil die Aufgabe (114.) bey vieleckigten Figuren oft wiederholt werden muß, und dadurch zu Fehlern Gelegenheit gegeben werden kann. Man findet daher in Schriftstellern der practischen Geometrie andere Auflösungen dieser Aufgabe vorgetragen. Vorzüglich empfehlungswerth ist das von Mayer pract. Geom. §. 302. u. f. gelehrte Verfahren jede Figur in ein Rechteck zu verwandeln. Der Beweis desselben würde hier zu weitläufig ausfallen. Ein anderes bequemes Verfahren jede geradlinichte Figur in ein Dreyeck zu verwandeln, beruht auf folgenden Gründen. Es sey ABCDE Fig. 72. die verwandelnde Figur, in A soll die Spitze des Dreyecks, in DE die Grundlinie liegen. Man zerfälle die Figur durch Diagonalen von A aus in lauter Dreyecke, ziehe mit der ersten Diagonale AC die Parallele Ba, bis sie die Verlängerung von DC in g schneidet, hierauf mit AD die Parallele ab, bis sie die Verlängerung von ED in b schneidet, so ist das Dreyeck AbE = Fig. ABCDE. Die Dreyecke ABC, AaC sind gleich, weil sie auf einer Grundlinie AC, und zwischen zwey Parallelen AC, Aa stehen. Es ist daher einerley, ob man den Umfang der Figur nach ABC oder nach AaC laufen läßt. Eben dieß gilt für die Dreyecke AaD, AbD, folglich bleibt die Größe der Figur immer dieselbe, der Umfang mag nach ABCD, oder nach AbD gehen. Auf dieselbe Weise würde man verfahren, wenn auch auf der andern Seite von AE Winkel wie BCD sich befänden. Hieraus erhellet, wie man jede gegebene Figur von noch so viel Seiten, wenn sie lauter auswärts gehende Winkel hat, in ein Dreyeck verwandeln könne. Hätte die Figur auch einwärts gehende Winkel,

so muß man diese zuerst wegschaffen. Dieß erläutert (Fig. 72.*) ABCDE sey die zu verwandelnde Figur B ein einwärts gehender Winkel. Man ziehe AC, und mit derselben Ba parallel, nach dem Durchschnittspunct a der Parallele mit der folgenden Seite CD der Figur ziehe man von A aus die gerade Linie Aa, so ist der einwärtsgehende Winkel B in einen auswärts gehenden bey a verwandelt. Denn vermöge (109) ist CAB = CAa, folglich ist es einerley, ob man von der ganzen Figur CAED, CAB oder CAa wegnimmt, daher sind die Figuren ABCDE, und AaDE einander gleich. Wenn man die einwärts gehenden Winkel einer Figur weggeschafft hat, so verfährt man übrigens bey der Verwandlung in ein Dreyeck, wie bereits an Fig. 72. gezeigt worden ist.

116) Satz. Parallelogramme und Dreyecke, welche gleiche Grundlinie haben, verhalten sich wie ihre Höhen. Man theile die Höhen AH, ah Fig. 73. in gleiche Theile, und ziehe durch jeden Theilungspunct mit den Grundlinien der Parallelogramme AB, Bc Parallelen, so werden sie dadurch in so viel gleiche kleinere Parallelogramme getheilet, als Theile in ihren Höhen enthalten sind. Daher verhalten sich die Parallelogramme, wie die Anzahl der gleichen Theile in den Höhen, d. i. wie die Höhen. Für incommensurable Höhen gilt die Erinnerung (86). Für Dreyecke von gleichen Grundlinien und ungleichen Höhen folgt der Satz aus dem vorhergehenden, weil sie als die Hälften von Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinie und Höhe mit ihnen haben, angesehen werden können.

117) Satz. Parallelogramme und Dreyecke von gleichen Höhen und ungleichen Grundlinien verhalten sich wie die Grundlinien. Denn man theile die Grundlinien in gleiche Theile, ziehe mit den Seitenlinien der Parallelogramme durch die Theilungspuncte Paralle-

len, und in den Dreyecken von den Spitzen nach den Theilungspuncten gerade Linien, so werden dadurch die Parallelogramme in so viel gleiche kleinere Parallelogramme, die Dreyecke in so viel gleiche kleinere Dreyecke getheilt, als Theile in den Grundlinien enthalten sind: daher verhalten sich die Parallelogramme und Dreyecke, von gleichen Höhen und ungleichen Grundlinien, wie die Anzahl ihrer gleichen Theile, d. i. wie ihre Grundlinien.

118) Satz. Parallelogramme und Dreyecke von ungleichen Grundlinien und Höhen sind in dem zusammengesetzten Verhältniß von beyden, oder verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien in die Höhen. Es seyen Fig. 74. AB, BC zwey Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und Höhen, man verzeichne ein drittes BD, welches mit dem einen die Grundlinie, mit dem andern die Höhe gemein hat. Die Grundlinie von AB heiße B (Basis), die Höhe H, von BC, b, h, von BD, b, H; so hat man vermöge (116. 117)

$$AB : BD = B : b$$
$$BD : BC = H : h$$

daher vermöge der Zusammensetzung der Verhältnisse

$$AB : BC = B.H : b.h$$

B. sey z. B. = 4, H = 7, b = 2, h = 3, so ist Parallelogramm AB : BC = 4. 7 : 2. 3 = 28 : 6
Von den Dreyecken wird der Beweis eben so geführt.

119) Satz. Eine Größe messen, heißt sie mit einer andern bekannten (dem Maaße) vergleichen, und ihr Verhältniß zu der bekannten Größe angeben. Es versteht sich von selbst, daß man Größen von einerley Art mit einander vergleichen, also Linien durch Linien, Flächen durch Flächen, und Körper durch Körper messen muß. Schon lange hat man zum Ausmessen von Linien den Fuß gewählet, ein Maaß, welches mehr

und weniger mit der natürlichen Grösse des menschlichen Fußes übereinkommt, und davon seinen Ursprung hat. Gewöhnlich theilt man den Fuß in zwölf gleiche Theile, Zolle (Fingerbreiten), den Zoll wieder in zwölf gleiche Theile Linien, und so weiter von zwölf zu zwölf. Man nennt dieses das Duodecimalmaaß. Zur Ausmessung großer Linien trägt man mehrere Fuße (12, 16 bis 18) auf eine Stange, und nennt dieß eine Ruthe. Noch größere Längen werden durch Meilen gemessen, welche aber in den verschiedenen Ländern eben so verschieden sind als die Füße, wodurch sie ausgedrückt werden. Vorzüglich merkwürdig ist die geographische Meile, deren 5400 auf den Umfang der Erde, oder 15 auf den 360ten Theil des Umfanges (einen Grad) gehen, diese Meile beträgt 23661 rheinländische Fuße, den Grad zu 29576 rheinländ. Ruthen von 12 Fußen gerechnet. Die Ruthen bezeichnet man durch eine (o), die Fuße durch (1), die Zolle durch (,,) u. s. w. welche Zeichen man über die Zahlen rechter Hand schreibt, die die Menge von Ruthen, Fußen und Zolle ausdrücken. Z. B.

16° 4′ 6″ lese man 16 Ruthen 4 Fuß 6 Zoll. In mathematischen Schriften, so wie in der ausübenden Meßkunst, theilet man, wegen der Bequemlichkeit, welche die Decimaltheilung mit sich bringt, die Ruthe, den Fuß u. s. w. von zehn zu zehn in kleinere Theile. Wenn man bey dieser Art zu theilen die Ruthe, den Fuß, oder überhaupt das größere Maaß als die Einheit betrachtet, so kann man die kleinern Theile als Decimalbrüche des Ganzen schreiben, und hat die oben angeführte Bezeichnungsart nicht nöthig; z. B. 3° 7′ 5″ Decimalmaaß ist 3,75 Ruthen, oder 37,5 Fuße, oder 375 Zolle. Man erspart bey der Decimaltheilung die Reduction eines Maaßes in das andere.

120) Anmerkung. Um einen bestimmten Begriff von der angegebenen Länge irgend einer Linie zu haben,

muß man vor allen Dingen von der Größe des dabey gebrauchten Fußes unterrichtet seyn. Man findet die vorzüglichsten europäischen Fußmaaße unter einander verglichen, und in Scrupel des ehemaligrn pariser oder königlichen Fußes ausgedrückt in Ebert Kruse's hamburgischen Kontoristen. Alte Maaße, verglichen mit neuern, enthält Eisenschmidt de ponderibus et mensuris veterum Romanorum, e. c. Argentorati, 1737. 2te Ausgabe, Paucton Metrologie, Paris, 1780. zuverläßiger als beyde Rome de l'Isle oben angeführe Metrologie. Ich setze einen kleinen Auszug von solchen Fußmaaßen aus diesen Schriften her, welche mir zunächst für meine Absicht die wichtigsten scheinen. Der ehemalige pariser Fuß bleibt deswegen vorzüglich merkwürdig, weil er bisher fast in allen mathematischen und physikalischen Schriften nicht nur in Frankreich, sondern auch in Deutschland und andern Ländern gebraucht worden ist. Man theilet ihn in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, die Linie in 10 Scrupel, also den ganzen Fuß in 1440 Scrupel. In diesen Theilen sind die übrigen Fuße angegeben:

Rheinländischer . . . } Dänischer . . . . . }	1391,3
Londner	1351,6
Gemeiner Engl. . . .	1350
Wiener	1420
Berliner	1373
Frankfurter (am Mayn)	1270
Hamburger	1270
Cöllner	1220
Nürnberger	1346¾
Leipziger	1253
Braunschweiger . . .	1265
Der alte Römische . .	1307,28
Der griechisch-olympische	1369,56

Die Elle hält in Deutschland gewöhnlich zwey Fuß des im Lande üblichen Maaßes. In dem Hessendarmstädtischen soll, vermöge fürstlicher Verordnung, der Darmstädter Fuß als Werkmaaß durchgehends eingeführt seyn. Er ist $\frac{1278}{1440}$ des pariser Fußes regulirt. 16 dieser Werkfuße machen eine Ruthe Feldmaaß, welche in 10 Theile getheilt den Decimalfus, und so weiter von 10 zu 10 getheilet das beym Feldmessen zum Grund liegende Decimalmaaß giebt. Indessen findet man an mehrern Orten des Darmstädtischen auch noch andere ältere Maaße, die mehr und weniger von dem allgemeinen Landmaaße abweichen. Z. B. Hier in Giessen bedient man sich einer Elle, welche $\frac{2531}{1440}$ des pariser Fußes ausmacht. 8 dieser Ellen machen die hiesige Feldruthe, und die Hälfte der Elle den ältern hiesigen Werkfuß aus, welcher daher $\frac{1211}{1440}$ des pariser Fußes ist. Noch eine besondere Erwähnung verdient das neue französische Längenmaaß, der Metre. Es ist der zehnmillionste Theil des viertel Meridians, oder der 40millionste Theil des Umfangs der Erde von einem Pol zum andern, und ist nach dem ehemaligen französischen Maaß 3 Fuß 0 Zoll 11,44 Linien, also etwas größer, als die Hälfte der ehemaligen Toise zu 6 königl. Fußen. Die Eintheilung dieses neuen Maaßes ist durchaus Decimaltheilung:

1000 Metres heißt millaire,
100000 ein Grad,
$\frac{1}{10}$ Metre decimetre,
$\frac{1}{100}$ Metre centimetre, u. s. w.

Auf dieses neue Längenmaaß gründen sich die übrigen neuen französischen Maaße, Münzen und Gewichte, bey welchen ebenfalls die Decimaltheilung eingeführt worden ist.

121) Aufgabe: Einen tausendtheiligen Maaßstab zu verfertigen. Man theile die ganze Länge des Maaßstabes AB Fig. 75. in zehn gleiche Theile (in der Figur

sind nur fünfe, Raum zu ersparen, abgebildet), ein solches Zehntheil AC theile man wieder in 10 gleiche Theile, so erhält man Hunderttheile des Ganzen. Jedes dieser Hunderttheile muß abermals in 10 Theile getheilt werden. Dieß zu bewerkstelligen, richte man auf die Endpuncte der Linie AB, so wie auf alle Zehntheile Perpendikel von unbestimmter Länge auf. Auf die beyden Perpendikel durch die Endpuncte A und B der Linie trage man 10 gleiche Theile von willkührlicher Größe, und ziehe durch alle Theilungspuncte zehn Parallelen mit AB. Hierauf theile man DE = AC in 10 gleiche Theile, und ziehe von C nach 1 von 1 nach 2 die Transversallinien bis auf die letzte von 9 nach D, so ist geschehen, was man verlangte. Denn es ist $xx = \frac{1}{10}$ E 1 $= \frac{1}{100}$ ED $= \frac{1}{1000}$ von 2 AB, $yy = \frac{2}{10}$ E 1 $= \frac{2}{100}$ ED $= \frac{2}{1000}$ 2 AB, weil

EC : Cx = E 1 : xx und
CE : Cy = E 1 : yy aber
CE : Cx = 1 : 10
CE : Cy = 2 : 10

daher $xx = \frac{1}{10}$ E 1, $yy = \frac{2}{10}$ E 1 u. s. w. läßt man einen Theil wie AC eine Ruthe bedeuten, so ist C 1 ein Fuß, xx ein Zoll Decimalmaaß. Man kann daher diesen Maaßstab bey Entwerfung einer Figur auf dem Papier eben so brauchen, wie man das natürliche Maaß auf dem Felde braucht. Man nennt daher auch die Eintheilung Fig. 75. den verjüngten Maaßstab. Es erhellet, daß man auf eine ähnliche Weise, wenn man auf AD, AC 12 gleiche Theile trägt, einen verjüngten Maaßstab für Duodecimalmaaß, und überhaupt für jede Eintheilung des Maaßes verfertigen kann. Eine in Ruthen, Fußen und Zollen gegebene Länge mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maaßstabe abzustechen, messe man die Ruthen auf CB, die Fuße auf AC, und die Zolle, indem man mit der einen Spitze des Zirkels

auf dem Perpendikel, welches die Ruthenzahl bestimmt, hinauf fährt, bis die andere Spitze auf einem Durchschnittspunct, der Transversalen mit einer der Parallellinien eintrift. Die Anzahl der Zolle wird durch die Parallellinie, auf welcher sich die Zirzelspitzen befinden, bestimmt. z. B. 5 wenn es die 5te, 7 wenn es die 7te Parallellinie, von unten herauf gezählt, ist.

122) Satz. Ebene Figuren misset man durch Quadrate, deren Seitenlinien einen Zoll, einen Fuß, eine Ruthe, eine Meile enthalten, je nach dem die zu messende Figur klein oder groß ist. Daher nennt man das Flächenmaaß auch Quadratmaaß.

123) Aufgabe. Ein Parallelogramm auszumessen. Man messe die Grundlinie und die Höhe des Parallelogramms mit demjenigen Längenmaaß, worinn die Seite des zum Grunde gelegten Quadratmaaßes ausgedruckt ist, multiplicire die Zahlen, welche das Längenmaaß der Grundlinie und Höhe des Parallelogramms ausdrücken, miteinander, so giebt das Produkt, wie viel Quadratmaaße in dem Parallelogramm enthalten sind, das ist den Inhalt des Parallelogramms an. Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so ist die Seite desselben selbst die Höhe. Man multiplicirt daher, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, die Zahlen, welche das Maaß seiner Seitenlinien ausdrükken, miteinander. Ist das Rechteck ein Quadrat, wo Grundlinie und Höhe gleich sind, so darf man nur die Quadratzahl einer Seitenlinie desselben nehmen, um den Inhalt zu finden. Der Beweis dieses Verfahrens erhellet, wie folgt: a. Fig. 76. sey das auszumessende Parallelogramm, b. das Quadratmaaß. Vermöge (119) heißt a ausmessen, angeben, wie sich b zu a verhält. Nach (118) verhalten sich Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und Höhen gegen einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien in die Höhen.

Bey dem angenommenen Maaß b sind aber Grundlinie und Höhe einander gleich, und jede = 1. Drückt man daher Grundlinie und Höhe von a durch die Seite von b aus, zum Beyspiel jene durch 4, diese durch 3, so zeigt das Produkt 3. 4 = 12 das Verhältniß von a zu b an, denn man hat:

1 . 1 : 3 . 4 = b : a also a = 3 . 4 b = 12 b, nennt man b selbst 1 (einen Quadratfuß), so ist 12 der Inhalt von a. Für die Ausrechnung des Rechteckes und des Quadrats erhellet der Beweiß aus dem obigen von selbst. Man kann sich bey diesen Figuren den Beweiß des Satzes auch durch eine Zeichnung versinnlichen. Man trage auf die Seiten des Rechteckes oder des Quadrates AC, AB Fig. 77. die Seite des Maaßes so oft als angeht, und ziehe durch die Theilungspuncte mit den Seitenlinien Parallelen, so übersieht man auf einen Blick, daß in dem Rechteck, oder dem Quadrate so viel kleinere Quadrate enthalten sind, als das Produkt aus den in den Seitenlinien enthaltenen Theilen angiebt. In dem Rechteck der 77ten Figur sind 3. 4 = 12, in dem Quadrate 3. 3 = 9 Theile. Wenn das angenommene Maaß in den Seiten der zu messenden Figur (Fig. 77 x) nicht genau aufgeht, so wird auch der Inhalt derselben keine ganze Zahl von Quadratmaaßen seyn, sondern durch ein Bruch ausgedruckt werden. Da man aber nach (86) durch eine veränderte Theilung alle Linien als commensurabel betrachten kann, so wird man auch zu jedem Parallelogramm, so wie zu jeder Figur überhaupt (denn auf der Ausrechnung der Parallelogramme beruht die Ausrechnung der übrigen Figuren) ein solches Quadratmaaß finden können, wodurch die Figur genau gemessen wird. Hieraus erhellet, was es heiße, der Inhalt eines jeden Rechteckes sey gleich dem Produkte seiner Seitenlinien, oder zwey Linien miteinander multiplicirt, geben eine Fläche. Eigentlich giebt eine Linie etliche oder unzählige Mal genom-

men nie eine Fläche, wohl aber kann das Produkt zweyer Linien als eine Zahl betrachtet, das Verhältniß einer Fläche gegen eine andere ausdrücken.

142) Anmerkung. Da der Inhalt eines jeden Quadrates der Quadratzahl des Maaßes, welches seine Seite misset, gleich ist, so rechtfertiget dieß den Namen Quadrat für das Produkt zweyer gleichen Factoren, Arithmetik (69). Die Seite eines Quadrates sey 1 Fuß = 10 Zoll, so enthält der Quadratfuß 10. 10 = 100 Quadratzolle, der Quadratzoll 100 Quadratlinien u. s. w.; oder das Quadratmaaß wird von 100 zu 100 getheilet, wenn das Längenmaaß von 10 zu 10 getheilet wird. Bey größern Figuren rechnet man nach Quadratruthen, Quadratmeilen. Bey Feldmessungen nach Morgen Landes. In dem Hessendarmstädtischen soll der Morgen Ackerland 160 □ Ruthen, oder 16000 □ Fuße Decim. Maaß, der Morgen Wald 180 □ Ruthen = 18000 □ Fuß enthalten. Es ist aber die Größe der Morgen nicht überall dieselbe. Hat man Duodecimalmaaß, so enthält der Quadratfuß 12 . 12 = 144 Quadratzolle, der Quadratzoll 144 Quadratlinien u. s. w. Ueberhaupt findet man die Eintheilung des Quadratmaaßes, wenn man die Zahl, welche die Eintheilung des Längenmaaßes ausdrückt, quadriret. Auch bey dem Quadratmaaß hat das Decimalmaaß den Vortheil, daß die Reduction des kleinern Maaßes in das größere, oder umgekehrt, ohne Division und Multiplication verrichtet werden kann. Die Bezeichnungsart des Quadratmaaßes ist wie bey dem Längenmaaß, nur daß man das Zeichen □ oder Flächenmaaß hinzusetzt. Auf jede Gattung von Einheiten des Decim. Quadratmaaßes kommen zwey Stellen, wegen der Theilung von 100 zu 100. z. B. 123° 46′ 03″ 16 □″ M. lese man 123 Ruthen, 46 Fuß, 3 Zoll, 16 Linien Quadratmaaß, oder alles in Linien ausgedruckt 123460316 Linien.

Will man das kleinere Maaß in das größere verwandeln, so schneidet man für jede Gattung von Einheiten zwey Stellen von der Rechten zur Linken ab. Bey Duodecimal-Maaß muß man, mit 144 dividiren, und bey der umgekehrten Reduction damit multipliciren.

125) Anmerkung. Quadratmaaße, welche sich auf verschiedene Längenmaaße von verschiedener Eintheilung beziehen, miteinander zu vergleichen, ist eine Aufgabe der Lehre von den zusammengesetzten Verhältnissen. Die allgemeine Vorschrift ist: man quadrire die Zahlen, welche das Verhältniß der Längenmaaße gegeneinander, so wie die, welche das Verhältniß der Eintheilung eines jeden Längenmaaßes ausdrücken, und setze beyde Verhältnisse zusammen, so hat man das Verhältniß der Quadratmaaße. Z. B. wie viel machen 48632 Darmst. dec. Quadratfuße rheinländische Quadratfuße? Weil 10 Decimalfuße = 16 darmst. Werkfuße, so ist das Verhältniß des Darmstädter dec. Quadratfußes zum Quadratwerkfuß $16^2 : 10^2 = 256 : 100$, oder 100 decim. Quadratfuße machen 256 □ Werkfuße. Ferner ist das Verhältniß des darmst. Werkfußes zum Rheinländischen 1276 : 1391 (120), folglich das Verhältniß der Quadratfuße $1276^2 : 1391^2$, oder 1391^2 darmst. Quadratf. machen 1276^2 rheinl. Quadratfuße, dieß giebt nach Arithm. (111):

$$\left.\begin{matrix} 100 & : & 256 \\ 1391^2 & : & 1276^2 \end{matrix}\right\} = 48632 : \text{Ges.}$$

Die Rechnung wird am leichtesten mit hinlänglicher Schärfe durch Logarithmen geführt:

log. 48632 = 4.6869043
178
log. 256 = 2.4082400
2 log. 1276 = 6.2117014
Summe = 13.3068635
log. 100 = 2.0000000
2 log. 1391 = 6.2866542
8.2866542

abgezogen von obiger Summe läßt

5.0202093 = die zu diesen Logarithmen gehörige Zahl findet man durch Proportionaltheile nach Arithm. (144.) 104753, welches die gesuchte Zahl von rheinländischen Quadratfußen ist. Weil diese Zahl aus dem Produkte

$$\frac{256 \cdot 1276^2}{1391^2 \cdot 100} \cdot 48632$$ besteht, wovon

der eine Factor linker Hand (das Verhältniß der Fuße) für jede Anzahl zu reducirender Fuße unveränderlich bleibt, so kann man diesen Factor besonders berechnen. Durch Logarithmen geschieht dieß, wenn man von der ersten Summe den log. 48632 wegläßt, dieß giebt

8.6199414
hiervon abgezogen 8.2866542
log. 2,1542 = 0.3332872

welche Zahl man mit der gegebenen Anzahl darmst. dec. Quadratfuße multiplicirt, um rheinländische Quadratfuße zu erhalten. Dieses Verfahrens kann man sich bedienen, um Tafeln zu berechnen, welche ein Fußmaaß in dem andern ausgedrückt geben, wenn solche Reductionen oft vorkommen. Wollte man umgekehrt rheinl. Quadratmaaß in darmst. decimal Quadratmaaß verwandeln, so dürfte man nur die gegebene Anzahl von rheinl. Quadratfußen durch 2,1542 dividiren.

Weil

Weil es aber leichter ist, mit einem Decimalbruch multipliciren als dividiren, so kehre man obiges Verhältniß der Fußmaaße um, und sage:

$$256 : 100 \\ 1276^2 : 1391^2 \Big\} = \text{rheinl. } \square F. : \text{Ges.}$$

Dieß giebt den Factor $\frac{100 . 1391^2}{256 . 1276^2}$, welchen man mit der Zahl der rheinl. □ Fuße multiplicirt, um darmst. Dec. □ Fuße zu erhalten. Die Rechnung wird durch Logarithmen am bequemsten geführt

$$\log. 100 . 1391^2 = 8.2866542$$
$$\log. 256 . 1276^2 = 8.6199414$$

zur Kennziffer des obigen log. 4 geliehen und abgezogen, giebt $3.6667128 - 4$ dieser Logarithme gehöret zu 0,4646, vermittelst größerer Tafeln findet man die Zahl 0,46465.

Wie viel machen 1000 rheinl. Quadratfuße in darmst. dec. Maaß? Antwort:

$$1000 . 0,46465 = 464,65.$$

Auf eine ähnliche Weise verfähret man bey der Reduction von andern Flächenmaaßen.

126) Aufgabe. Den Inhalt eines Dreyecks zu berechnen. Man messe die Grundlinie und die Höhe desselben, multiplicire sie miteinander und halbire das Produkt, oder man multiplicire die ganze Grundlinie mit der halben Höhe, oder die ganze Höhe mit der halben Grundlinie, nachdem sich eine von beyden bequem halbiren läßt. Der Beweis erhellet daraus, weil jedes Dreyeck die Hälfte eines Parallelogramms ist, welches mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat.

127) Aufgabe. Ein Trapezium auszurechnen. Man messe die parallelen Seiten desselben, und das Perpendikel zwischen beyden, multiplicire die Summe der parallelen Seiten in das Perpendikel, und halbire das Pro-

dikt. Oder, man multiplicire die halbe Summe der beyden Seiten in das Perpendikel, oder das halbe Perpendikel in die Summe der parallelen Seiten. Denn man ziehe in dem Trapezium ABCD Fig. 78. die Diagonale BD, so sind die Höhen der beyden Dreyecke ADB, DBE, als Perpendikel zwischen den parallelen Grundlinien AB, DC gleich. Es heiße diese gemeinschaftliche Höhe h, so ist Dreyeck $ADB = \frac{AB.h}{2}$, $DBC = \frac{DC.h}{2}$, also Trapezium $ABCD = \frac{AB.h}{2} + \frac{DC.h}{2} = \frac{(AB+DC).h}{2} = \frac{1}{2}h.(AB+DC) = h.\frac{1}{2}(AB+DC)$.

128) Aufgabe. Den Inhalt einer jeden vieleckigten Figur zu finden. Man zerfälle die Figur durch Diagonalen in lauter Dreyecke, und rechne jedes Dreyeck nach (126.) aus. Die Summe der Dreyecke giebt den Inhalt der Figur. Oder II. man fälle auf eine der längsten Seiten AB der Figur Fig. 80. von der gegenüberstehenden Ecke E ein Perpendikel EG, und auf dasselbe andere Perpendikel von allen Eckpuncten der Figur, welche, da sie unter sich und mit AB parallel sind, die Figur in Trapezia, und an den Enden in Dreyecke theilen. Jene rechne man nach 127, diese nach 126 aus, so erhält man den Inhalt der Figur.

III. Man verwandele die Figur in ein Rechteck oder in ein Dreyeck, und rechne sie nach dieser Verwandlung aus.

129) Anmerkung. Jede der drey gegebenen Auflösungen der vorstehenden Aufgabe hat ihre besonderen Vorzüge. Die erste ist zu empfehlen, wenn man die Seiten und Diagonalen einer Figur bey ihrer Aufnahme ohnehin gemessen hat, da man nur die Perpendikel der Dreyecke zu messen braucht, um den Inhalt

der Figur zu finden. Die zweyte Methode ist vorzüglicher, wenn der Inhalt einer Figur auf dem Felde, ohne sie zu Papier zu bringen, angegeben werden soll, weil man alle Höhen der Trapezia und Drehecke auf dem gemeinschaftlichen Perpendikel EG messen kann. Auch gewähret diese Art Figuren durch Trapezia zu berechnen, noch einen besondern Vortheil bey der Eintheilung der Figuren nach parallelen Gränzlinien (wovon unten). Die dritte Auflösung geht bey krummlinichten, oder sehr irregulairen vielseitigen Figuren, am schnellsten, sie gewähret aber weniger Genauigkeit, als die beyden vorhergehenden. Beyspiel zu I. ABCDEF Fig. 79. sey die auszurechnende Figur, ich nehme an, sie sey nach einem verjüngten Maaßstab auf dem Papier verzeichnet worden, Fig. 75. mag zur Ausmessung dienen, und zwar bedeute AC 10 Ruthen, C1, 1° xx1' (dieß zeigt, wie ein Maaßstab zu Figuren von verschiedener Größe gebraucht werden kann). Man messe die Grundlinie und Perpendikel der Drehecke, wie folgt:

AB	=	14° 5'	
AF	=	15° 0'	Δ AFB
EB	=	21° 0'	
Perp.	=	8° 5'	Δ EFB
EB	=	21° 9'	
Perp.	=	6° 3	Δ DEB
DB	=	17° 0'	
Perp.	=	5° 4'	Δ DCB

145' = AB
75 = ½ AF

725
1015
10875 □' = Δ AFB

105 = ½ EB
85.
525
840
8925 □′ = Δ EFB

105 = ½ EB
63
315
630
6615 □′ = Δ DEB

85
54
340
425
4590 □′ = Δ DCB

10875 = AFB
8925 = EFB
6615 = DEB
4590 = DCB
31005 □′ Inhalt der Figur.

Beyspiel zu II. Fig. 80. wobey derselbe Maaßstab gebraucht ist:

233 = AB
140 = HC
373
45′ = ½ GI
1865
1492
16785 □′ = trap. AG

140′ = HC
190 = FI
230
115 = ½ (HC + FI)
53 = 1, 2
345
575
6095 □′ = trap. HI

190 = FI
160 = KD
350
175 = ½ (FI + KD)
30
5250 □′ trap. FD

160 = KD
20 = ½ Perp.
3200 □′ = △ KED

16785′ = ABCH
6095 = HCIF
3250 = FIDK
3200 = IDE
31330 □′ Inhalt der Figur.

Auf eine mechanische Weise läßt sich der Inhalt einer jeden Figur bestimmen, wenn man ein Netz von solchen Quadratmaaßen, welche man bey der Ausmessung zum Grunde legt, auf ein mit Oel getränktes Papier oder Glastafel zeichnet, und dieses Netz auf die auszurechnende Figur legt. Die Menge der Quadrate, welche innerhalb den Umfang der Figur fallen, geben den Inhalt der Figur an. Sollte der Umfang einige Quadrate schneiden, so muß man die abgeschnittenen

Theile derselben nach dem Augenmaaß schätzen. Dieses Verfahren ist nützlich, wenn man den Inhalt sehr irregulairer Figuren angeben soll, wobey es auf Kleinigkeiten nicht ankommt. Z. B. wenn man den Flächeninhalt eines ganzen Landes nach Quadratmeilen aus einer Charte bestimmen soll.

130) Anmerkung. Die Ausrechnung der Figuren ist ein Haupttheil der Feldmeßkunst. Man verrichtet entweder dieses Geschäfte auf dem Felde selbst, ohne die auszumessende Figur in den Grund zu legen, oder man mißt auf dem Felde nur so viel als nöthig ist, um der Figur eine ähnliche nach dem verjüngten Maaßstabe auf dem Papier zu verzeichnen, welche nach den vorstehenden Aufgaben ausgerechnet eben den Inhalt giebt, welchen die Ausmessung und Berechnung auf dem Felde unmittelbar gegeben haben würde. Das eine, wie das andere Verfahren setzt die Auflösung der folgenden Aufgabe voraus: eine gerade Linie auf dem Felde auszumessen. Hierzu gebraucht man Maaßstäbe von halben und ganzen Ruthen, oder, um schneller fertig zu werden, eine Meßkette, worauf die Länge von mehrern Ruthen getragen ist. Die Meßschnur taugt zum Feldmessen nicht, weil sie dem Einfluß der Witterung zu sehr ausgesetzt, und zu zerbrechlich und dehnbar ist. Die Länge der Meßketten ist 5 — 10 Ruthen; nicht wohl größer, damit sie nicht zu schwer ausfallen. Die Einrichtung der Meßkette ist gewöhnlich so, daß jedes Glied von Eisendrath einen Decimalfuß enthält. Die Glieder werden am besten durch Ringe von gegossenem Messing verbunden, damit die einzelnen Fuße desto besser in die Augen fallen. Dieß giebt der Meßkette zugleich mehr Haltbarkeit. Fünf Fuß oder $\frac{1}{2}$ Ruthe werden durch größere Ringe, und die ganzen Ruthen durch Ringe mit einem Querstück verbunden. An den Enden der Meßkette befinden sich zwey große 2 — 3 Zoll im Durchmesser

haltende Ringe, durch welche Kettenstäbe gesteckt werden. Diese sind an ihrem untern Ende zugespitzt mit Eisen beschlagen, und mit einem Querstift versehen, damit der Kettenring, welcher von oben herunter über den Stab gesteckt wird, nicht ganz durchfalle. Der Anfang und das Ende der Kette, so wie der Anfang eines jeden Fußes und einer jeden Ruthe und halben Ruthe muß genau in der Mitte der Ringe seyn, welche sich an den Enden der Kette befinden, und welche ihre Glieder verbinden. Ehe man zur Messung einer geraden Linie auf dem Felde schreitet, muß dieselbe durch Stäbe nach Anmerk. (6) abgesteckt werden. Hierauf steckt einer von den beyden Gehülfen, welche sich an den Enden der Meßkette befinden, seinen Kettenstab in den Anfangspunct der zu messenden Linie, der andere geht mit dem andern Kettenstab längst der Linie hinaus, und wird von dem ersten genau in dieselbe einvisirt. Hierauf spannt der längst der Linie hinaus gegangene (der vordere Kettenzieher) die Kette an, und bezeichnet den Punct, wo sein Kettenstab hinfällt, mit einem kleinen Stäbchen. Nun gehen beyde längst der Linie weiter, bis der hintere an das Stäbchen des vordern kommt, wo er seinen Kettenstab einsteckt, und die vorhergehende Operation ganz wiederholt. So geht es fort, bis die Linie gemessen ist. Wenn der vordere Kettenzieher eine bestimmte Anzahl von Absteckstäbchen (6–12) am Anfang der Messung bey sich genommen hat, so dienet dieß zur bequemen Nachzählung der Kettenlängen, indem der hintere bey jeder Kettenlänge ein Stäbchen von dem vordern enthält. Am Ende der Linie mißt man noch die einzelnen Ruthen, Fußen, Zolle, welche über eine ganze Anzahl von Kettenlängen in der Linie enthalten sind. Bey einem häufigen Gebrauch der Meßkette schleifen sich die Glieder der Ringe derselben aus, oder es verbiegen sich wohl einige Glieder; durch das erstere wird die Kette länger, durch das letztere kürzer. Man muß

sie daher von Zeit zu Zeit durch einen genauen Maaßstab prüfen, und den Fehler nöthigen Falls in Rechnung bringen.

Bey der Messung mit Ruthen müssen, wenn die Arbeit fördern und genau werden soll, zwey Ruthenschläger seyn. Beyde stoßen ihre Ruthen in der zu messenden Linie genau aneinander, der hinterste hebt hierauf seine Ruthe auf, und setzt sie vor die Ruthe des vordern, indem er laut 1, 2 u. s. w. zählet. Hierbey ist zu bemerken, daß der eine lauter ungerade, der andere lauter gerade Zahlen bekommt; dieß dienet Irthümer im Zählen der Ruthen zu verhüten. Wenn die zu messende Linie lang ist, so ist es besser, daß ein dritter die Zahl der Ruthen durch Striche auf einem Papier bemerkt, und das Maaß der Linie aufschreibt. Um bey dem Ruthenschlagen nicht zu viel von der geraden Linie abzuweichen, müssen die Stäbe, welche die Richtung der Linie angeben, nicht zu weit von einander stecken. Noch besser ist es, wenn man von einem Stab zum andern eine Schnur spannt, und an derselben hermisset, welches aber die Arbeit verzögert. Ueberhaupt ist zu bemerken, daß bey hinlänglicher Vorsicht, und angewendeter Sorgfalt eine Linie durch Ruthen am schärfsten gemessen werden kann, daß hingegen die Meßkette die Arbeit beschleunigt, und in Gegenden, welche nicht allzu uneben sind, doch eine hinlängliche Genauigkeit für die gewöhnlichen Feldmesseroperationen giebt. Die größten Linien, welche bey den Gradmessungen um die Gestalt der Erde zu bestimmen dienten, sind mit metallenen Maaßstäben von $\frac{1}{2}$ Ruthe, die man auf besondere Meßstühle legte, und vermittelst einer Setzwaage horizontal aneinander stieß, gemessen worden. Zu dem Feldmessen ist es hinreichend, Ruthen von gutem Tannenholz, welche an ihren Enden mit Eisen beschlagen sind, zu gebrauchen.

131) Anmerkung. Bey der Ausrechnung und Aufnahme der Figuren auf dem Felde ist überhaupt noch folgendes zu bemerken. Da die wenigsten Figuren, welche bey Feldmessungen vorkommen, wegen der natürlichen Unebenheit des Erdbodens, ebene Flächen sind, wie sie die vorhergehende Betrachtung voraussetzt, so muß man die Figuren vor ihrer Ausrechnung und Verzeichnung auf eine ebene Fläche reduciren. Zu dieser ebenen Fläche wählet man die horizontale, oder diejenige, welche die Oberfläche der Erde überall da hat, wo Berge und Thäler keine Unebenheiten in ihr veranlassen. Bey der Reduction der Figuren auf die horizontale Ebene verfährt man auf folgende Art: Es sey ABCDE Fig. 81. eine Figur, wovon die Puncte ABC in einer horizontalen Ebene E, und D auf einem Berge liegen. Man denke sich von den Puncten E, D Perpendikel oder Lothe Ee, Dd auf die horizontale Ebene durch ABD herunter gefällt, so ist ABCde die reducirte Figur, welche eigentlich gemessen und verzeichnet werden muß. Die Linien Ae, ed, dC, der reducirten Figur, welche den Grund des Bergs durchschneidet, kann man nicht unmittelbar messen; man muß daher dieselben aus den gemessenen AE, ED, DC herzuleiten wissen. Wenn der Abhang des Berges ziemlich eben, und der Winkel A, oder die Höhe desselben Ee bekannt ist, so kann man in dem rechtwinklichten Dreyeck AEe aus der gemessenen Hypotenuse AE und einem spitzigen Winkel, oder einer Seite, das übrige in dem Dreyeck also auch Ae durch Rechnung oder Zeichnung finden. Ist der Abhang sehr uneben, wie Fig. 82, so verfahre man bey Messung der Linie AE folgendermaßen: Man richte in A einen Stab lothrecht auf, und halte an diesen die Ruthe, oder spanne die Meßkette (bey solchen Messungen sind Ruthen der Meßkette vorzuziehen, weil man sie leichter horizontal halten, und ohnehin keine große Stationen auf einmal messen kann) horizontal nach 1 2,

hierauf richte man einen Stab lothrecht in 2, 3 auf, und messe 3, 4 horizontal, u. s. f. bis man nach C kommt. Addiret man hierauf alle horizontal gemessenen Linien 1 2, 3 4, 5 6, 7 8, zusammen, so erhält man die gesuchte horizontale Grundlinie A e. Hätte man auch die Höhen an den lothrechten Stäben A 1, 2 3 u. s. w. gemessen und addirte sie zusammen, so würde man dadurch die Höhe des Berges E e erhalten. Wenn die Puncte E D Fig. 81. gleich hoch liegen, so kann man die gemessene E D = e d setzen, weil alsdann die Figur E D d e ein Rechteck ist, d c wird auf eine ähnliche Art aus D C wie a e aus A E bestimmt. Um die Winkel B A e, A e d und so weiter zu finden, darf man nur die Fläche des Winkelmessers genau horizontal stellen, indem man von A nach dem erhabenen Punct E, oder von E nach dem vertieften Punct A visiret, denn dadurch erhält man sogleich die horizontalen Winkel B A e, F E D, wovon der letztere = A e d ist. Hieraus erhellet, wie nöthig es ist, dem Winkelmesser eine genaue horizontale Richtung zu geben. Man hat dazu besondere Instrumente, die Weingeistwaagen oder Libellen. Uebrigens soll unten in der analytischen Trigonometrie gezeigt werden, wie man aus einem schiefliegenden Winkel E A B den zugehörigen horizontalen e A B durch Rechnung finden könne. Dieses dienet dazu, den Fehler zu beurtheilen, welcher aus einer horizontalen Stellung des Winkelmessers herrühren kann.

132) Aufgabe. Ein Dreyeck in eine gegebene Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen.

Man theile die Grundlinie des Dreyecks in eben so viel gleiche oder ungleiche Theile von dem gegebenen Verhältniß, als in welche das Dreyeck getheilet werden soll, und ziehe von der Spitze nach den Theilungspuncten der Grundlinie gerade Linien, so ist geschehen, was verlangt. Denn die hierdurch entstehenden Theile

sind Dreyecke von gleicher Höhe, welche sich nach (117) wie ihre Grundlinien verhalten. Beyspiel: Man soll ein Dreyeck ABC, Fig. 66. in drey Theile theilen, welche sich gegen einander wie die Zahlen 1, 2, 3 verhalten. Man theile die Grundlinie AB in 6 gleiche Theile, und ziehe nach den Theilungspuncten 1, 2 von C gerade Linien.

133) Aufgabe. Eine jede Figur in eine gegebene Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen.

Man verwandle die Figur nach 113. in ein Dreyeck und theile dasselbe nach der vorstehenden Aufgabe. Fallen die Theilungslinien innerhalb der Figur, so ist die Aufgabe aufgelöset. Fallen die Theilungslinien ausserhalb der Figur, so muß man sie durch das umgekehrte Verfahren desjenigen, durch welches man die Figur in ein Dreyeck verwandelt hat, in die Figur zurückbringen.

Beyspiel. ABCDE Fig. 72. soll in zwey gleiche Theile getheilet werden. Man verwandle die Figur in das Dreyeck AbE, und halbire die Grundlinie desselben in D, und ziehe AD, so ist geschehen, was verlangt. Denn es ist $ADE = \frac{1}{2} AbE =$ der Hälfte der Figur ABCDE. Anderes Beyspiel.

Das Fünfeck ABCDE Fig. 83. in vier gleiche Theile zu theilen. Man verwandle die Figur in das Dreyeck DGF, und theile dieses durch die Linien D1, D2, D3 in vier gleiche Theile. Die Theilungslinien des Dreyecks D1, D2, sind zugleich Theilungslinien für das Fünfeck, denn es ist der Triangel $DGB = DBAE$, weil DAB sich selbst gleich, und $DAE = DAG$ vermöge der Construction bey der Verwandlung der Figur. Da nun $D1G = \frac{1}{4} DGF = \frac{1}{4} ABCDE$, so ist D1AE ebenfalls $= \frac{1}{4}$ ABCDE. Die Theilungslinie D3, welche zum Theil ausserhalb der Figur fällt, bringt man dadurch in die Figur, daß man mit

der nächsten Diagonale DB die Parallele 3, 4 zieht, bis diese in die von der Theilungslinie geschnittene Seite BC der Figur bey 4 eintrifft. D4 ist die auf die Figur reducirte Theilungslinie, denn es ist das Dreyeck DB3 = DB4, weil sie eine Grundlinie haben, und zwischen zwey Parallellinien stehen.

134) Anmerkung. Die Theilung der Figuren hat mehr Schwierigkeit, wenn die Theilungslinien eine vorgeschriebene Lage haben, etwa unter sich oder mit einer Seite der Figur parallel seyn sollen. Ueberhaupt können bey der Theilung der Figuren besondere Bedingungen in der Ausübung oft Hindernisse veranlassen, welche auf eine geschickte Art aus dem Wege zu räumen mehr Kenntnisse der Geometrie erfordert, als dieser Vortrag vorauszusetzen erlaubt. Man sehe desfalls die bereits angeführten Schriftsteller der practischen Geometrie, und insbesondere Schleichers Beyträge zur practischen Meßkunst, 1stes Heft, Frankfurt 1793. bey Varrentrapp und Wenner, worin die Theilung von Dreyecken und Vierecken sehr ausführlich erläutert ist. Die vorgetragene Art Figuren durch bloße Zeichnung zu theilen, ist besonders brauchbar, wenn die zu theilende Figur auf dem Papier verzeichnet worden ist. Auf dem Felde bedient man sich meistens einer andern Art, welche voraussetzt, daß man den Inhalt der zu theilenden Figur berechnet hat. Zur Erläuterung desselbelben dienen die folgenden Aufgaben.

135) Aufgabe. Wenn der Inhalt und die Grundlinie eines Dreyecks gegeben sind, die Höhe desselben zu finden. Da der Inhalt eines Dreyecks dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe gleich ist, oder der doppelte Inhalt gleich dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe ist, so findet man die Höhe, wenn man mit der Grundlinie in den doppelten Inhalt dividiret (Alrithm. 34.). Uebrigens bleibt bey dieser Aufgabe die

Lage des Dreyecks unbestimmt, weil nach (110.) unzählig viele Dreyecke von gleichem Inhalt über einer Grundlinie möglich sind.

Die Höhe eines Parallelogramms zu finden, dessen Inhalt gegeben ist, dividire man mit der Grundlinie in den Inhalt. Der Beweis dieses Satzes wird wie für die Dreyecke geführt.

136) Aufgabe. Eine jede geradlinichte Figur in jede gegebene Anzahl gleicher oder ungleicher Theile durch Rechnung zu theilen.

Man rechne den Inhalt der Figur nach 128 aus, und dividire denselben durch die Zahl der Theile, wenn sie gleich seyn sollen, oder suche die Größe eines jeden Theils, wenn sie ungleich sind, nach der Sonderungsrechnung. Um die gefundene Größe der Theile in die Figur zu tragen, verfahre man, wie folgt. 1) Wenn die Figur durch Dreyecke ausgerechnet worden ist. Fig. 79. mag als Beyspiel dienen: Es soll diese Figur in drey gleiche Theile getheilet werden.

Man vergleiche $\frac{1}{3}$ der Figur $= 103° 35'$ mit dem Inhalte eines der berechneten Dreyecke der Figur AFB, den Unterschied zwischen beyden sehe man ebenfalls als ein Dreyeck an, welches zu dem ersten hinzugesetzt oder abgeschnitten werden muß, je nachdem der Theil der Figur größer oder kleiner als das Dreyeck ist. Hier tritt der letzte Fall ein. $AFB - \frac{1}{3}$ Fig. $= 108° 75' - 103° 35' = 5° 40'$. Zu diesem Inhalt des von AFB abzuschneidenden Dreyecks suche man die Höhe nach der vorhergehenden Aufgabe.

$$\frac{2.\ 5° 40'}{FB = 200'} = \frac{400}{200} = 2'$$

Dieses Perpendikel trage man auf FB nach A zu, und ziehe nach der Entfernung desselben mit FB eine Parallele, oder bemerke nur ihre Durchschnittspuncte

auf den Seiten der Figur AB, AF und ziehe entweder von F nach dem Durchschnittspunct in AB, oder von B nach dem Durchschnittspunct in FA eine gerade Linie, so wird dadurch das erste Drittheil der Figur abgeschnitten. Um das zweyte zu bestimmen, verfähret man auf eine ähnliche Weise. Man vergleicht den Inhalt von AFE nebst dem hinzugekommenen Stück von 5° 40′ mit dem Drittheil der Figur, und sieht, ob etwas hinzu oder davon gethan werden muß.

$$\begin{aligned} FEB &= 89^\circ\ 25' \\ &+ 5^\circ\ 40' \\ &\hline 94^\circ\ 65' \\ \tfrac{1}{3}\text{ Fig.} &= 103^\circ\ 35' \\ &\hline \text{Inhalt des Dreyecks, welches} = 8^\circ\ 70' \end{aligned}$$

zu FEB gesetzt werden muß

$$EB = \frac{2 \cdot 870'}{210} = \frac{1740}{210} = 8{,}3 \text{ Perpendikel.}$$

Hier ist nur eine Lage der Theilungslinie möglich, weil das Dreyeck DBE nur die Seite DE mit der Figur gemein hat. Man schneide daher parallel mit BE in der Entfernung von 8, 3 in DE ein, und ziehe von B nach dem Durchschnittspunct die zweyte Theilungslinie. Der dritte Theil der Figur bleibt von selbst übrig. Durch dieses Verfahren erhalten die Theilungslinien der Figur keine parallele Lage unter sich, und die Theile selbst eine irregulaire Gestalt, welches bey Feldvertheilungen oft von großem Nachtheil seyn kann. Daher ist die folgende Auflösung der Aufgabe in den meisten Fällen der ersten vorzuziehen.

2) Wenn die Figur durch Trapezia ausgerechnet worden ist.

Fig. 80. soll in zwey Theile getheilt werden, welche sich gegen einander verhalten wie 1 : 2. Da der Inhalt der Figur $= 313^\circ\ 30'$ ist, so ist der Inhalt des

einen Theils = 104° 43½′, des andern 208° 86⅔′ den ersten Theil mit dem Trapezium ABCH = 167°85′ verglichen, bleibt ein Unterschied von 63°41⅓′, welcher von ABCH abgeschnitten werden muß. Man sehe das abzuschneidende Stück als ein Parallelogramm über der Grundlinie HC an, und suche die Höhe desselben $= \frac{63\ 41\frac{1}{3}'}{HC = 140'} = 4°5\frac{1}{3}'$. Diese Linie trage man auf EG von HC nach G zu, und ziehe mit HC die Parallele fe. Die Figur HC fe ist ein Trapezium, folglich um das Dreyeck Cde größer, als das Parallelogramm über der Linie HC von der Höhe Cd. Man muß also dieses Dreyeck wieder von HC fe als ein Parallelogramm über fe abschneiden, oder kürzer man sehe den vorher als Parallelogramm über HC abgeschnittenen Inhalt, als ein Trapezium von den Grundlinien HC, fe an, dessen Höhe man sucht. Diese Höhe ist vermöge (127), der Inhalt dividiret durch die halbe Summe von HC + fe, aber fe = fd + de = HC + de, also $\frac{1}{2}(HC + fe) = \frac{1}{2}HC + (HC + de) = \frac{1}{2}(2HC + de) = HC + \frac{1}{2}de$. Man dividire daher den Inhalt durch $HC + \frac{1}{2}de$, so findet man die Höhe des abzuschneidenden Theiles genauer als vorhin $= \frac{6341\frac{1}{3}'}{140' + \frac{1}{2}de}$; $de = 50'\ \frac{1}{2}de = 25'$, also die gesuchte Höhe $1x = \frac{6341\frac{1}{3}'}{175} = 3°6\frac{1}{5}'$. Durch x ziehe man mit HC oder fe eine Parallele, so wird dadurch der erste Theil der Figur über AB abgeschnitten, der andere Theil bleibt von selbst übrig. Wäre das Dreyeck Cde unbeträchtlich klein gewesen, so hätte man diese doppelte Rechnung nicht nöthig gehabt, sondern die zuerst gefundene Höhe gleich beybehalten können.

137) Anmerkung. Wenn man das zusammennimmt, was bisher an den gehörigen Stellen von der

Aufnahme, Verzeichnung, Ausrechnung und Eintheilung der Figuren gesagt worden ist, so hat man die Theorie des Feldmessens so vollständig, als sie sich aus den ersten Anfangsgründen der Geometrie herleiten läßt. Die weitere Ausführung und vollkommene Bildung eines practischen Geometers setzt aber noch viele bisher nicht vorgetragene Kenntnisse aus der reinen sowohl, als angewandten Mathematik voraus, wozu die Folge den Beweis liefern wird. Die Ausarbeitung geometrischer Risse und Charten ist für den practischen Geometer eine unentbehrliche Wissenschaft. Sie unterscheidet sich ganz von der mahlerischen Zeichnung. Es ist eine willkührliche gewählte Zeichensprache, wodurch man dem Auge über die Beschaffenheit einer Gegend auf einen Blick mehr sagt, als man durch die umständlichste wörtliche Beschreibung derselben nicht kann. Die Anleitung zu dieser Kunst gehöret aber eben so wenig hierher, als sich dieselbe aus einer bloßen Beschreibung erlernen läßt. Am besten geschieht dieß, wenn man nach guten Mustern selbst die Hand ans Werk legt. In dieser Hinsicht sind vorzüglich zu empfehlen: Kefersteins Anleitung zu practisch-geometrischen Zeichnungen, Leipzig 1778. Vorschriften zu militairischen Plan- und Charten-Zeichnungen von Müller, Engelbrecht und Schmidt, Potsdam im Verlag der Autoren.

138) Satz. In jedem rechtwinklichten Dreyeck ist das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Summe der Quadrate der beyden Katheten.

Man errichte über den Seiten ab, bc des rechtwinklichten Dreyecks abc die Quadrate abfg, bcde Fig. 84. verlängere die Seiten, gf, de derselben, bis sie sich in h schneiden, verlängere hb bis i und ziehe damit ak, cl parallel. Endlich verbinde man die Puncte k, l, so ist aklc das Quadrat über der Hypotenuse, der Summe der Quadrate der beyden Katheten

theten gleich. Dieß wird so erwiesen: ak, bk, bc als gegen über stehende Seiten der schiefen Parallelogramme akhb, hbcl sind gleich und parallel (70). Daher die Figur aklc ein Parallelogramm (72). Die rechtwinklichten Dreyecke abc, hbe sind gleich, weil be = bc, he = fb = ab, daher ist ac = bk = lc. Folglich das Parallelogramm aclk gleichseitig. Ferner ist < hbe = < bca, < fbh = < ibc, daher ibc + bca = R, folglich bic ebenfalls = R, daher lc, ka perpendikular auf ac, und das gleichseitige Parallelogramm aclk ein Quadrat. Dieses Quadrat besteht aus den beyden Rechtecken aimk, imlc, wovon jenes dem Quadrat über ab, dieses dem Quadrat über bc gleich ist. Denn es ist das Rechteck am dem schiefen Parallelogramm ah gleich, weil sie eine Grundlinie ak haben und zwischen zwey Parallelen ak, hc stehen. Aus eben dem Grund ist das schiefe Parallelogramm ah dem Quadrate af gleich, weil sie die Grundlinie ab gemein haben und zwischen den Parallelen ab, gh stehen. Daher ist Rechteck am gleich dem Quadrate af. Eben so wird erwiesen, daß das Rechteck il dem schiefen Parallelogramm bhlc, dem Quadrate bcde gleich ist.

139) Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz heißt von seinem Erfinder der Pythagoräische, auch wegen seiner Wichtigkeit magister matheseos.

Man hat mehrere Beweise von ihm gegeben, der Euclidische ist der gewöhnliche, und fast in den meisten Lehrbüchern der Mathematik zu finden. Der Beweis (138.) dienet den Satz allgemeiner zu machen, und ihn auf Rechtecke und Parallelogramme überhaupt auszudehnen. Fig. 85. wird dieß erläutern, wo eben so wie 138. erwiesen wird, daß das Rechteck abcd, der Summe der Rechtecke ebfc, aegh gleich ist.

140) Aufgabe. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches der Summe zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

Man trage auf die Schenkel ab, ac Fig. 86. eines rechten Winkels die Seiten der beyden gegebenen Quadrate, und ziehe die Hypotenuse bc, so ist dieselbe die Seite des gesuchten Quadrates.

Wenn ab = ac oder die beyden gegebenen Quadrate gleich sind, so ist bc die Seite des doppelten Quadrates. Setzt man auf dieselbe Weise die Seite des doppelten Quadrates zur Seite des einfachen, so erhält man die Seite des dreyfachen; aus der Seite des einfachen und dreyfachen die Seite des vierfachen, und so weiter die Seite eines jeden vielfachen Quadrates. Fig. 86. * erläutert dieses Verfahren. ab = ac giebt bc, welches nach ad getragen wird, dieß bestimmt bd, das nach ae getragen be u. s. w. Bey die Puncte c, d, e, f, g, h schreibe man die Zahlen 1 2 3 4 5 6 u. s. w., so erhält man einen Maaßstab, dessen Theile die Seiten von Quadraten sind, welche sich wie die beygeschriebenen Zahlen verhalten. Man nennt ihn den Quadratstab. Der Gebrauch desselben wird weiter unten erläutert werden.

141) Aufgabe. Ein Quadrat zu finden, welches dem Unterschiede zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

Man verzeichne einen rechten Winkel Fig. 86. und trage auf den einen Winkel desselben die Seite des kleinern Quadrates ab. Die Seite des größern fasse man mit dem Zirkel, und schneide, indem man den Zirkel bey b einsetzt, auf dem andern Schenkel in c ein, so ist ac die Seite des gesuchten Quadrates, welches dem Unterschiede der beyden gegebenen Quadrate gleich ist.

142) Anmerkung. Vermittelst der beyden vorhergehenden Aufgaben kann man die Rational- sowohl als

Irrationalwurzeln geometrisch construiren. Wenn man ac Fig. 86. * = 1 setzt, so ist ad = $\sqrt{2}$, ae = $\sqrt{3}$, af = $\sqrt{4}$ u. s. w.; denn es ist

$$ac^2 : ad^2 = 1 : 2$$

daher $\sqrt{1} : \sqrt{2} = ac : ad$

und $ad = \frac{ac\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = \sqrt{2}$. Eben so wird der Beweis für ae, af u. s. w. geführet. Theilet man ac oder die angenommene Einheit in 1000 gleiche Theile und misset damit die Linie ad, ac, af und ferner, so erhält man die Quadratwurzeln $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.. in Tausendtheilen der Einheit. Auch Wurzeln aus Brüchen lassen sich durch diese Construction darstellen. Man nenne ae = 1, so ist af = $\sqrt{\frac{4}{1}}$, ad = $\sqrt{\frac{2}{1}}$, denn ae : af $\sqrt{3} : \sqrt{4} = af = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} ae = \sqrt{\frac{4}{3}}$ wenn ae = 1. Wenn die Summe der Quadrate der Seiten ab, ac in einem rechtwinklichten Dreyeck wieder ein Quadrat ist, so ist die dritte Seite bc rational. Es sey z. B. ab = 4, ac = 3, so ist bc = 5, denn $4^2 + 3^2 = 5^2$. Beschreibt man daher mit drey Seiten, die sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten, ein Dreyeck, so ist dieß rechtwinklicht. Dieses giebt ein bequemes Mittel auf dem Felde bloß durch die Meßkette Perpendikel zu ziehen.

143) Satz. Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

bc Fig. 87. sey parallel mit de, und af perpendikular auf de, bc, so sind nicht nur die Dreyecke abc, ade, sondern auch abg, adf ähnlich. Hieraus fließen die folgenden Proportionen

$$\begin{array}{rcl} ab : ad & = & ag : af \\ ab : ad & = & bc : de \\ \hline ag : af & = & bc : de \end{array}$$

das ist, die Grundlinien verhalten sich wie die Höhen in ähnlichen Dreyecken. Ferner ist

$$\Delta abc : \Delta ade = \frac{ag \cdot bc}{2} : \frac{af \cdot de}{2} = ag \cdot bc : af \cdot de,$$

oder das Verhältniß der Dreyecke ist das zusammengesetzte aus $\begin{pmatrix} ag : af \\ bc : de \end{pmatrix}$, weil aber die beyden Verhältnisse $ag : af$ und $bc : de$ gleich sind, so ist das zusammengesetzte Verhältniß nach Arithm. (109.) das doppelte des einen oder des andern Verhältnisses, je nachdem man beyde Verhältnisse durch $ag : af$ oder durch $bc : de$ ausdrückt. Daher Dreyeck $abc : ade = ag^2 : af^2 = bc^2 : de^2$ oder ähnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Höhen, oder wie die Quadrate ihrer Grundlinien, überhaupt wie die Quadrate gleichnamiger Seiten, weil alle gleichnamige Seiten einerley Verhältniß bey ähnlichen Figuren untereinander haben.

144) Satz. Aehnliche Figuren verhalten sich, wie Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Denn man zerfälle die Figuren durch Diagonalen in ähnliche Dreyecke, so verhalten sich diese ähnlichen Dreyecke vermöge (143) wie die Quadrate der Seitenlinien der Figuren, an welchen sie liegen, weil aber alle gleichnamige Seiten in ähnlichen Figuren einerley Verhältniß gegeneinander haben, so verhalten sich die ähnlichen Dreyecke in beyden Figuren wie die Quadrate irgend eines Paares ähnlich liegender Seiten der Figuren, folglich auch die Summe aller ähnlichen Dreyecke, d. i. die ganzen Figuren wie die Quadrate eines Paares ähnlich liegender Seiten der Figuren.

145) Anmerkung. Vermittelst der beyden vorhergehenden Sätze kann man Figuren nach gegebenen Verhältnissen vergrößern oder verkleinern. Wenn man die Seiten einer ähnlichen Figur 2, 3, 4mal größer macht, so wird der Inhalt der Figur 4, 9, 16mal größer. Suchte man hingegen aus dem gegebenen Verhältniß des Inhaltes zweyer Figuren das Verhältniß der Seitenlinien, so ziehe man aus den Zahlen, welche den Inhalt ausdrücken, die Quadratwurzel. Wollte man z. B. einer Figur eine ähnliche verzeichnen, welche dreymal kleiner wäre, so müßten sich die Seiten beyder Figuren gegeneinander verhalten wie $\sqrt{3} : \sqrt{1} = \sqrt{3} : 1$. In der Ausübung verfähret man hierbey am bequemsten so, daß man einen verjüngten Maaßstab verzeichnet, welcher zu dem Maaßstab der gegebenen Figur, das bestimmte Verhältniß der Seitenlinien von beyden Figuren habe, und nach diesem Maaßstab alle Seiten der zu verzeichnenden ähnlichen Figuren aufträgt. Auch dienet zur Auflösung dieser Aufgabe der §. 140. erwähnte Quadratstab. Man müßte für das gegebene Beyspiel zu den Linien a 3, a 1 des Quadratstabes Fig. 86 * und jeder Seite der gegebenen Figur die vierte geometrische Proportionallinie finden. Die Auflösung dieser Aufgabe, welche hierbey mehrmals wiederholet werden muß, zu erleichtern, hat man auf die Schenkel des Proportionalzirkels (89. Anmerk.) einen Quadratstab verzeichnet, welcher gewöhnlich vom Einfachen bis zum Sechzigfachen geht. In dem obigen Beyspiel würde man nach und nach jede Seite der gegebenen Figur in den Zirkel fassen, und sie auf den Quadratstab des Proportionalzirkels von 3 zu 3, oder von 30 zu 30 stechen, so gäbe die Weite des Proportionalzirkels von 1 zu 1 oder 10 zu 10 die gesuchte Seite der zu verzeichnenden Figur.

VI.

Vom Kreise.

146) Satz. Ein Perpendikel aus eines Kreises Mittelpunct c auf die Sehne a b halbiret die Sehne und den Winkel a c b Fig. 87. II. Eine Linie aus dem Mittelpunct nach der Mitte der Sehne gezogen, steht auf ihr perpendikular. III. Ein Perpendikel aus der Mitte der Sehne a b aufgerichtet, geht durch den Mittelpunct des Kreises c. I fließet aus der Gleichheit der Dreyecke a d c, c b d, in welchen ausser den rechten Winkeln die Seiten a c, c b als Halbmesser eines Kreises gleich sind, und die Seite d c gemeinschaftlich ist. II folgt aus der Gleichheit eben der Dreyecke, worin vermöge der Voraussetzung die drey Seiten, also auch die den gleichen Seiten gegenüberstehende Winkel gleich, also die gleichen Nebenwinkel bey d Rechte sind. III wird aus II so erwiesen. Wenn der Mittelpunct des Kreises nicht in d c, sondern in irgend einem andern Punct e läge, so ziehe man e d, welches vermöge II auf a b perpendikulair ist. Da aber vermöge der Voraussetzung, auch d c auf a b senkrecht seyn soll, so kann e d von c d nicht verschieden seyn, oder es müßten zwey Perpendikel aus einem Puncte auf eine gerade Linie aufgerichtet werden können, welches unmöglich ist.

147) Aufgabe. Zu dem gegebenen Umfang eines Kreises den Mittelpunct zu finden. Man ziehe innerhalb des Kreises willkührlich eine Sehne a b Fig. 87., halbire dieselbe in d, richte aus d das Perpendikel d c auf, verlängere es zu beyden Seiten, bis es den Umfang in f und g schneidet, halbire endlich f g in c, so ist c der gesuchte Mittelpunct des Kreises. Der Beweis folgt aus dem vorhergehenden Satz und (21).

148) Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis

zu zeichnen. Man verbinde ab, bc durch gerade Linien, und sehe sie als Sehnen eines Kreises an. Aus der Mitte von jeder derselben richte man die Perpendikel de, fg auf. Der Durchschnittspunct h derselben ist der Mittelpunct des Kreises, welcher durch a, b und c geht. Der Beweis erhellet aus (146. III.), vermöge dessen der Mittelpunct des Kreises in jedem der Perpendikel de, fg, also in ihrem Durchschnittspuncte liegen muß, weil sie nur diesen Punct miteinander gemein haben. Vermittelst dieser Aufgabe kann man um jedes Dreyeck abc einen Kreis beschreiben. Man nennt solche Figuren, deren Eckpuncte alle in dem Umfang eines Kreises liegen, in dem Kreis beschriebene Figuren, und den Kreis, welcher durch die Eckpuncte einer Figur geht, den um die Figur beschriebenen Kreis.

Drey Puncte bestimmen einen Kreis, so wie zwey Puncte eine gerade Linie. Andere krumme Linien erfordern im Allgemeinen mehr als drey Puncte zu ihrer Bestimmung. Der Kreis ist daher nach der geraden Linie die einfachste Linie.

149) Satz. I. Sehnen eines Kreises, welche gleich weit vom Mittelpunct abstehen, sind gleich. II. Die dem Mittelpunct nähere ist größer, die entferntere kleiner.

Man fälle Fig. 89. von dem Mittelpunct c die Perpendikel cf, cg auf die Sehnen de, ab, so sind diese Perpendikel vermöge I gleich, ferner $dc = ca$, und die rechtwinkelichten Dreyecke cag, cdf gleich, folglich $df = ag$; $df = \frac{1}{2}de$, $ag = \frac{1}{2}ab$, daher $de = ab$. II. Es sey $ck < cg$, so ist $hi > ab$, denn es ist $hk = \frac{1}{2}hi = \sqrt{hc^2 - ck^2}$ und $ag = \frac{1}{2}ab = \sqrt{ac^2 - cg^2}$, aber $hc^2 = ac^2$, $ck^2 < cg^2$, daher $hc^2 - ck^2 > ac^2 - cg^2$, und da

zu dem gröſsern Quadrat auch die gröſsere Wurzel gehöret, so ist $\frac{1}{2}hi > \frac{1}{2}ab$ oder $hi > ab$.

150) Satz. Eine gerade Linie, welche den Kreis schneidet, schneidet ihn in zwey und nicht mehr als zwey Puncten. a Fig. 90. sey ein Durchschnittspunct der Linie mit dem Kreis. Man fälle aus dem Mittelpunct auf die schneidende Linie das Perpendikel cd, ziehe den Halbmesser ca, und verzeichne dem rechtwinkelichten Dreyeck cda ein gleiches cdb auf der entgegengesetzten Seite von cd, so ist b ebenfalls in dem Umfang des Kreises, weil $cb = ca$. Ausser b und a giebt es keinen Durchschnittspunct der Linie mit dem Kreis, sondern alle andere Puncte, wie e und f, liegen entweder ausserhalb oder innerhalb dem Kreise, weil $ce > ab$, $ef < ab$ (74.).

151) Satz. Wenn die Sehne Fig. 90. von dem Mittelpuncte des Kreises abwärts rückt, so wird sie vermöge 149. II. immer kleiner, oder die Durchschnittspuncte der geraden Linie ab mit dem Kreise rücken immer näher zusammen, bis sie, wenn die Linie in die Lage kh gekommen ist, in einen Punct h zusammenfallen. Eine gerade Linie, welche nur einen Punct mit dem Umfang eines Kreises gemein hat, und übrigens ganz ausserhalb dem Kreise liegt, heiſst eine Tangente, oder berührende Linie.

152) Satz. Wenn man auf das Ende eines Halbmessers ein Perpendikel setzt, so ist dieses Perpendikel eine Tangente des Kreises. gh Fig. 90. sey perpendikular auf cg, man verlängere sie zu beyden Seiten, so ist cg der Abstand des Mittelpunctes c von kh (74), und alle übrige Linien, welche man von c nach kh ziehen kann, sind gröſser als cg, d. i. kh liegt ganz ausserhalb dem Kreise, und hat nur den Punct g mit ihm gemein.

153) Satz. Kreise, welche einander schneiden, schneiden einander in zwey Puncten. II haben eine gemeinschaftliche Sehne. III ihre Mittelpuncte liegen in einer aus der Mitte der gemeinschaftlichen Sehne gezogenen perpendikulairen Linie.

I. Wenn ein Kreis einen andern in a Fig. 91. schneidet, so liegt ein Theil des einen Kreises innerhalb, der andere Theil ausserhalb dem andern Kreise. Da nun beyde Kreise zusammenhängende krumme Linien sind, so muß es ausser dem ersten Durchschnittspuncte a nothwendig noch einen zweyten b geben, daß es aber nicht mehr als zwey Durchschnittspuncte giebt, erhellet folgendermaßen. Gesetzt es gäbe drey Durchschnittspuncte, so finden zwey Fälle statt, entweder liegen die drey Durchschnittspuncte in einer geraden Linie, oder nicht. Im ersten Fall müßte jeder der sich schneidenden Kreise drey Durchschnittspuncte mit einer geraden Linie gemein haben, wider (150.); im andern Fall müßten zwey ganz verschiedene Kreise durch drey Puncte gehen, welche nicht in einer geraden Linie liegen, gegen (148.).

II. erhellet von selbst, wenn man die beyden Durchschnittspuncte durch eine gerade Linie verbindet.

III. folgt aus 146. Die Mittelpuncte der beyden Kreise c. C können auf verschiedenen Seiten von der gemeinschaftlichen Sehne, oder auf einer Seite derselben liegen. Fig. 91 *. Weil alle Puncte c, C welche sich auf der Linie der Mittelpuncte c C befinden, gleichen Abstand von a und b haben, und sich auf einer Linie unzählig viele Puncte gedenken lassen, so giebt es auch unzählig viele Kreise über der gemeinschaftlichen Sehne a b. Je größer der Halbmesser des Kreises ist, desto weniger erhebt sich der Bogen über die Sehne, desto flächer ist er, und der Abschnitt a e b wird ein desto kleinerer Theil vom ganzen Kreise. Wenn der Halbmesser sehr groß, unendlich groß wird, so erhebt sich

der Bogen sehr wenig über seine Sehne, und fällt im letzten Fall ganz mit derselben zusammen. Dieses drückt man auch so aus, man kann jede bestimmte gerade Linie als einen sehr kleinen Theil eines unendlich großen Kreises ansehen.

154) Satz. Wenn sich die gemeinschaftliche Sehne zweyer sich schneidenden Kreise in eine gemeinschaftliche Tangente verwandelt, so berühren die Kreise einander, und haben nur einen einzigen Punct miteinander gemein. Fig. 92. liegen die berührenden Kreise auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente. Fig. 92. * auf einer Seite derselben.

Concentrische Kreise Fig. 93. sind solche, welche mit verschiedenen Halbmessern ca, cb aus einem gemeinschaftlichen Mittelpunct c beschrieben worden sind. Ihre Umfänge haben überall gleichen Abstand voneinander.

155) Aufgabe. An jedem gegebenen Punct eines Kreises eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe einen Halbmesser an die gegebene Stelle, und setze auf diesen Halbmesser, wo er in dem Umfang eintrifft, ein Perpendikel, so ist dasselbe die gesuchte Tangente (151.).

156) Aufgabe. Von einem Puncte ausserhalb eines Kreises an den Kreis eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe von dem gegebenen Punct a Fig. 94. nach dem Mittelpunct des Kreises c eine gerade Linie ac, auf dieselbe das Perpendikel de, beschreibe mit ca einen Kreisbogen, bis er das Perpendikel in e schneidet, ziehe ce und nach f, wo ce den Umfang des Kreises schneidet, af, so ist af die gesuchte Tangente. Denn vermöge der Construction ist de eine Tangente des Kreises an d und edc = R. In den beyden Triangeln afc, edc ist ac = ce, cf = cd und Winkel c gemeinschaftlich, daher die Dreyecke vermöge (39) gleich, und $<afc = edc = R$, daher af die Tangente an f.

157) Erklärung. Winkel, deren Scheitel am Mittelpunct eines Kreises liegen, heißen Winkel am Mittelpunct. Winkel im Kreise, deren Scheitel am Umfang eines Kreises liegen, Winkel am Umfang.

158) Satz. Ein Winkel am Mittelpunct, welcher zwischen seinem Schenkel einerley Bogen mit einem Winkel am Umfang hat, ist noch einmal so groß als der Winkel am Umfang. Bey dem Erweis dieses Satzes muß man drey Fälle unterscheiden:

I. Der Mittelpunct c Fig. 95. liege in einem der Schenkel des Winkels am Umfang. Weil cb = cd, so ist das Dreyeck bcd gleichschenklicht, und d = b aber acb ein äusserer Winkel des Dreyecks = d + b = 2 d.

II. Der Mittelpunct liege ausserhalb den Schenkeln des Winkels am Umfang. Man ziehe von dem Scheitel des Winkels am Umfang nach dem Mittelpuncte eine gerade Linie dc, und verlängere sie, bis sie in e den Umfang abermals trifft. Vermöge I. hat man

$$\angle ecb = 2\,edb$$
$$\angle eca = 2\,eda \text{ daher}$$

ecb — eca oder acb = 2 edb — 2 eda = 2 (edb — eda) = 2 adb.

III. Der Mittelpunct liege zwischen den Schenkeln des Winkels am Umfang. Man verbinde die Scheitel der Winkel d, c wieder durch eine gerade Linie, und verlängere dieselbe bis e, so hat man vermöge I.

$$\angle ace = 2\,ade$$
$$\angle ecb = 2\,edb \text{ daher}$$

ace + ecb = 2 ade + 2 edb = 2 (ade + edb) oder acb = 2 adb.

159) Satz. Zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte gehören gleiche Sehnen und Bögen; II. zu gleichen Sehnen und Bögen in einem Kreise gehören gleiche Winkel am Mittelpuncte.

Es sey Fig. 96. $<acb = <dce$, so ist $ab = de$ weil die ganzen Dreyecke $acb = dce$ vermöge (39) gleich sind. Daß der Bogen ab = Bogen de erhellet so: Man nehme den Punct f innerhalb ab willkührlich an, und ziehe fe, beschreibe den Winkel acf gleich dcg, und lege acb so auf dce, daß ac auf dc, cb auf ce fällt, so deckt das Dreyeck acb, das Dreyeck dce, und der Winkel acf den Winkel dcg, oder cf fällt auf cg. Weil nun beyde Linien cf, cg einander gleich sind, so fällt f auf g. Eben so kann man für jeden andern Punct f^1 in ab erweisen, daß er auf einen zugehörigen Punct g^1 in de fällt, d. i. die ganzen Bogen ad, de fallen auf einander, decken einander, und sind gleich.

II. Wenn die Sehnen und Bögen ab, de einander gleich sind, so sind es auch die zugehörigen Winkel am Mittelpunct. Denn aus $ab = de$ folgt Dreyeck $acb = dce$, weil die drey Seiten gleich sind, folglich Winkel $dce = acb$. Wenn aber die Sehnen ab, de gleich sind, so können die Bögen ab, de nicht ungleich seyn, weil sonst zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte ungleiche Bögen gehörten wider I.

160) **Aufgabe.** Einen Kreisbogen zu halbiren. Man halbire den zu dem Bogen gehörigen Winkel am Mittelpunct, so wird eben dadurch der Bogen halbiret.

161) **Satz.** In einem Kreise verhalten sich die Winkel am Mittelpunct acb, acd Fig. 97. wie die zwischen ihren Schenkeln enthaltene Bögen ab, ad.

Man trage einen willkührlichen Theil ae von einem der Bögen ab weiter fort nach bd, und ziehe nach jedem Theilungspunct einen Halbmesser ce. Wenn der angenommene Theil ae sowohl in dem Bogen ad als ab genau etliche Mal enthalten ist, so erhellet, daß eben so viele kleine gleiche Winkel eca in den Winkeln acb, acd, als kleine gleiche Bögen ab, ad begriffen

sind, und daß sich daher die Winkel acb, acd wie die Bögen ab, ad verhalten.

Gieng das angenommene Maaß ae nicht genau in beyden Bögen ab, ad zugleich auf, so wird auch der Winkel eca in den Winkeln acb acd nicht zugleich aufgehen. Man verkleinere das angenommene Maaß ae (etwa durch fortgesetzte Halbirung von ab), so wird man endlich, selbst wenn ab mit ad incommensurabel wären, auf ein solches Maaß kommen, welches die Bögen ab, ad so genau misset, daß der noch zurück bleibende Fehler als verschwindend angesehen werden kann. Alsdann werden die Winkel acb, acd eben so genau durch den kleinen Winkel ace gemessen, und es werden sich auch hier die Bögen, wie die zugehörigen Winkel verhalten. Ueberhaupt gelten bey incommensurablen Kreisbögen ganz die Schlüsse, welche (§. 85.) bey incommensurablen geraden Linien gebraucht worden sind; d. i. man kann sie in Hinsicht ihres Verhältnisses gegen einander als commensurabel betrachten. Es sey z. B. ae $\frac{1}{60}$ des Theils vom Umfang, oder $\frac{1}{360}$ des ganzen Umfangs, so ist ace ein Grad oder $\frac{1}{360}$ des ganzen Kreises. Wäre ab = 30 ae, ad = 50 ae, so würden die Winkel acb, acd 30 Grad 50 Grad seyn, d. i. $\frac{30}{360}$ $\frac{50}{360}$ des ganzen Kreises.

162) Satz. Die zu verschiedenen Kreisen gehörige Bögen gleicher Winkel am Mittelpunct sind gleiche aliquote Theile des ganzen Umfanges, oder verhalten sich gegen einander, wie sich die ganzen Umfänge der Kreise verhalten, zu denen sie gehören.

acd, bce Fig. 93. seyen gleiche zu verschiedenen Kreisen gehörige Winkel am Mittelpunct. Man bezeichne den kleinern Kreis durch kr. den größern durch Kr. den Umfang (peripheriam) des kleinern Kreises durch p, des größern durch P, so finden folgende Verhältnisse statt:

$$\begin{array}{l} \sphericalangle acd : kr. = Bog.\ ad : p. \\ \sphericalangle bce : Kr. = Bog.\ be : P. \\ \hline \sphericalangle acd : kr. = \sphericalangle bce : Kr. \text{ daher} \\ Bogen\ ad : p = Bog.\ be : P. \end{array}$$

Es sey z. B. $\sphericalangle ecd = \sphericalangle bce = 30$ Grad $= \frac{30}{360} = \frac{1}{360} = \frac{1}{12}$ des Kreises, so ist $ad = \frac{1}{12}$ p, be. $\frac{1}{12}$ P.

163) Anmerkung. Die beyden vorstehenden Sätze zeigen, wie man Winkel durch Kreisbögen messen könne, welche man mit einem willkührlichen Halbmesser von dem Scheitel aus zwischen ihren Schenkeln beschrieben hat, wenn man den ganzen Umfang der Kreise in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilet, und einen solchen Theil, als das allgemeine Winkel- oder Bogenmaaß betrachtet. In der Anmerkung (60) ist bereits erwähnt worden, daß man den ganzen Kreis in 360 gleiche Theile (Grade), den Grad wieder in 60 Minuten u. s. w. von 60 zu 60 theilet. Eben dieser Theilung bedienet man sich auch bey den Kreisbögen, und man versteht unter einem Grad eben sowohl den 360ten Theil des Umfanges, als einen Winkel, welcher den 360ten Theil des Kreises ausmacht.

Zur Messung und Verzeichnung der Winkel auf dem Papier bedienet man sich des Transporteurs eines in 180 Grade getheilten Halbkreises von Messing Fig. 98. Des bequemern Gebrauchs wegen sind die Grade auf diesem Instrument doppelt, von der Rechten zur Linken, und von der Linken zur Rechten beschrieben, wie die Figur zeigt. Einen auf dem Papier gegebenen Winkel zu messen lege man den Mittlpunct des Instruments so an den Scheitel des zu messenden Winkels acb, daß einer der Halbmesser cb cd, auf welchen sich die Anfangspuncte der Theilung befinden, auf den einen Schenkel des Winkels falle, so schneidet der andere Schenkel auf der Theilung des Transporteurs die

Zahl der Grade (hier 60) des Winkels ab. Zur Bezeichnung von den Graden, Minuten, Secunden bedienet man sich derselben Zeichen, welche man für Ruthen, Schuhe und Zolle gebraucht.

Z. B. 40° 12′ 16″ Bog. M. heißt 40 Grad, 12 Minuten, 16 Secunden, Bogen Maaß.

Einen in Graden, Minuten u. s. w. gegebenen Winkel zu Papier zu bringen, ziehe man eine gerade Linie b c, lege den Trasporteur an den Ort c, wohin der Scheitel des Winkels fallen soll, eben so, wie vorhin beschrieben worden ist, an, und bemerke die Stelle der Theilung, welche der gegebenen Größe des Winkels entspricht, mit einem kleinen Pünctchen auf dem Papier, ziehe hierauf von diesem Punct nach c eine gerade Linie, so ist a c b der verlangte Winkel. Die Minuten und kleinern Theile der Winkel muß man meistens nur nach dem Auge schätzen, weil die gewöhnliche geringe Größe des Transporteurs nicht erlaubt, solche kleine Theile auf ihnen anzugeben.

164) Anmerkung. Die Winkel auf dem Felde zu messen, bediente man sich ehedem häufiger als jetzt des Astrolabs, eines Winkelmessers, welcher mit dem Transporteur die größte Aehnlichkeit hat. Ein in 180 Grade (nach Beschaffenheit seiner Größe in halbe und viertheil Grade) eingetheilter Halbkreis, an dessen Durchmesser zwey Dioptern befestiget sind, und um dessen Mittelpunct sich ein Diopterlinial bewegt. Das Werkzeug kann, vermittelst einer an seiner untern Fläche befestigten Hülse und eines befindlichen kugelförmigen Scharnieres, sowohl in horizontaler, als verticaler Lage auf einem Stativ befestigt werden. In jener Lage muß es horizontal, in dieser vertical herumgedreht und festgestellt werden können. Einen horizontalen Winkel mittelst des Astrolabs zu messen, bringe man den Mittelpunct des Instruments, in der zuerst erwähnten Lage,

über den Scheitelpunct des Winkels, und drehe dasselbe so lange herum, bis sein Durchmesser, oder die Absehlinien der unbeweglichen Dioptern mit dem einen Schenkel des Winkels zusammen fallen, hierauf lasse man die Fläche des Astrolabs unbeweglich stehen, und drehe das um seinen Mittelpunct bewegliche Diopternlinial, bis es auf den andern Schenkel des Winkels trifft, so wird die Schärfe dieses Linials den Winkel auf dem eingetheilten Rande des Astrolabs abschneiden. In dieser Hinsicht muß der Mittelpunct c des Astrolabs Fig. 98. und des bemeglichen Diopternlinials Fig. 99. genau in der Schärfe des Linials, und die Absehlinien der Dioptern in eben dieser Schärfe liegen; sie werden daher zur Hälfte über das Linial hervorstehend gesetzt, wie die 99. Figur zeigt. Einen verticalen Winkel mittelst des Astrolabs zu messen, bringe man das Werkzeug, vermittelst seines Scharnieres, in eine verticale Ebene, und drehe es herum, bis sein Durchmesser mit den unbeweglichen Dioptern horizontal steht, hierauf drehe man das bewegliche Diopternlinial, bey unverändertem Stande des Instruments, so lange, bis es nach dem erhabenen Puncte des verticalen Winkels gerichtet ist, so schneidet die Schärfe des Linials die Zahl der Grade des verticalen Winkels a b. Die mit dem Astrolab gemessenen Winkel werden durch den Transporteur nach (132) zu Papier gebracht. Da man auf diese Weise die Winkel nicht leicht schärfer als in ganzen und halben, höchstens viertheil Graden messen und auftragen kann, so zieht man bey blos geometrischen Constructionen, die Aufnahme der Winkel durch das Meßtischchen, oder die Zollmännische Scheibe der Aufnahme und Verzeichnung durch das Astrolab und den Transporteur, welche weitläuftiger und minder genau ist, mit Recht vor. Nur bey Höhenmessungen hat das Astrolab einen entschiedenen Vorzug. Ich füge daher zur Erläuterung eine Aufgabe dieser Art bey. Die Höhe eines

Thurms

Thurms a b zu finden, zu dessen untern Punct b man kommen kann.

Man messe horizontal eine Linie c b Fig. 100. von willkührlicher Größe (jedoch nicht allzu klein, damit der ∠a nicht zu spitz werde), in c vermittelst des Astrolabs den verticalen Winkel a c b, so ist dadurch das rechtwinklichte Dreyeck a c b bestimmt. Man ziehe auf dem Papier eine unbestimmte gerade Linie d e, richte auf dieselbe das unbestimmte Perpendikel e f auf, trage das Maaß von b c nach dem verjüngten Maaßstab auf e d, in d trage man vermittelst des Transporteurs den gemessenen Winkel c, so wird der Schenkel dieses Winkels d f die gesuchte Höhe des Thurmes e f abschneiden. Man misset dieselbe auf dem verjüngten Maaßstab, nach welchem man e d bestimmt hat. Verwickeltere Aufgaben von Höhenmessungen verspare ich bis in die Trigonometrie, wo sie mit größerer Schärfe durch Rechnung aufgelöset werden können.

165) Anmerkung. Da die beschriebene ältere Einrichtung des Astrolabs nicht taugt, die Winkel mit großer Schärfe zu bestimmen, so hat man in neuern Zeiten Winkelmesser von mancherley Art angegeben, welche dieses mit mehrerer Vollkommenheit leisten.

Es sind dieß theils eingetheilte ganze Kreise, theils Sictoren von Kreisen, wie der astronomische Quadrant, und der jetzt so sehr beliebte Hadleyische Spiegelsextant. Beyde sollen in der angewandten Mathematik an den gehörigen Stellen näher beschrieben werden. In Mayers practischen Geometrie findet man ein verbessertes Astrolab von einem ganzen Kreis angegeben, welches für die Aufgaben der practischen Geometrie eine hinlängliche Schärfe im Aufnehmen der Winkel gewähret. Vorzüglichere, aber auch zusammengesetztere und kostbarere Winkelmesser sind die in England zuerst gebrauchten Theodoliten und Scheibeninstrumente. Man sehe

Adams oben angeführte graphische Versuche. Die nähere Beschreibung dieser Werkzeuge gehöret nicht hierher, aber das Folgende ist allgemein brauchbar, und dienet die Einrichtung derselben zu erläutern. Da alle Werkzeuge zu geometrischem Gebrauch transportabel seyn müssen, und daher nicht allzu groß und schwer ausfallen dürfen, so schränkt man die Größe der Halbmesser von ganzen Kreisen auf 6 — 9 Zolle, von Sectoren auf 12 — 18 Zolle ein. Hieraus folgt, daß die Grade des eingetheilten Randes dieser Werkzeuge ebenfalls nicht sehr groß ausfallen, und man würde, wenn man diese Grade bloß nach dem Augenmaaß weiter theilen wollte, in den wenigsten Fällen eine Schärfe bis auf einzelne Minuten erhalten, welches doch bey guten Winkelmessern durchaus erforderlich ist. Man hat daher auf besondere Mittel gedacht, die Grade der Winkelmesser in kleinere Theile zu theilen. Einige der vorzüglichsten Arten sind folgende:

1) Durch Transversallinien. 05, 05 Fig. 101. seyen concentrische Kreise auf dem Rande eines Winkelmessers. Jeder derselben sey in Grade oder in eine gleiche Anzahl beliebiger Theile getheilet. Von 0 des äußern nach 1 des innern, und von 1 des äußern nach 2 des innern Kreises u. s. w. seyen Transversallinien gezogen. Jede derselben sey in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilet (in der Figur vier), so erhält man durch diese Theilung der Transversallinien eine Unterabtheilung der getheilten Kreise, wie aus folgender Betrachtung erhellet. 0a stelle einen Halbmesser der concentrischen Kreise, oder die Schärfe des um ihren gemeinschaftlichen Mittelpunct beweglichen Diopternlinials vor, 1b sey ein anderer Halbmesser dieser Kreise, oder die Lage des Diopternlinials durch den nächstfolgenden Grad. Wenn nun die Entfernung der concentrischen Kreise 00 sowohl als die Größe eines Theiles 01 gegen

den Halbmeſſer der Kreiſe als klein angenommen werden darf, ſo kann man nach (34) oo, 11 als Parallellinien, und die kleine Figur o110 als ein Parallelogramm betrachten, wovon o1 die Diagonale, und das Dreyeck oo1 die Hälfte iſt. Alle Halbmeſſer, welche durch die Punkte I, II, III der Diagonale gehen, können als Parallellinien mit oo angeſehen werden, und theilen daher einen Theil o1 der Kreiſe in eben ſo viel gleiche Theile, als Theile auf der Transverſale o1 enthalten ſind (82). Es ſey zum Beyſpiel die Theilung der Kreiſe einzelne Grade, die Transverſallinien ſeyen in 10 gleiche Theile getheilet, ſo giebt jeder Theil der letztern ein Zehntheil des Grades, d. i. einen Winkel von 6 Minuten an. Je weniger die Vorausſetzung ſtatt findet, daß oo mit 11 parallel ſey, deſto mehr entfernt ſich dieſe Art die kleinern Theile der Winkel zu beſtimmen von der Wahrheit.

2) Der Vernier oder Nonius. aa bb Fig. 102. ſeyen zwey concentriſche Kreisbögen, von welchen ſich der eine bb dicht an, oder über dem andern um den gemeinſchaftlichen Mittelpunkt bewegt. Eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile auf aa ſey auf bb in ſo viel, weniger einen, Theile getheilet; z. B. 11 Theile in 10, ſo iſt jeder Theil auf bb um $\frac{1}{10}$ größer als ein Theil von aa. Denn wenn man den Werth eines Theiles von bb in Theilen von aa ausdrücken wollte, ſo hätte man folgende Proportion $10^{bb} : 11^{aa} = 1^{bb} ; \text{Geſ.} = \frac{11}{10}{}^{aa} = 1\frac{1}{10}$. Eben ſo erhellet, daß zwey Theile von bb zwey Theile von aa um $\frac{2}{10}$, drey Theile von bb, drey Theile von aa um $\frac{3}{10}$ u. ſ. w. übertreffen. Nun ſey, wenn aa den eingetheilten Rand eines Winkelmeſſers vorſtellet, der Bogen bb mit der Schärfe des Diopternlinials co ſo verbunden, daß er ſich mit demſelben zugleich umdrehen muß. Die Theile auf bb ſeyen nach der entgegengeſetzten Richtung der Theilung des Winkelmeſſers beſchrieben, ſo heißt man eine ſolche Vorrichtung einen

Vernier. Der Gebrauch desselben erhellet, wie folgt. Die Schärfe des Diopternlinials schneide zwischen zwey nächste Theile des Winkelmessers ein, z. B. hier zwischen 65 und 66. Man zähle auf der Theilung des Verniers, bis an den Theil, welcher mit einem Theil des Winkelmessers zusammentrifft, in der Fig. 6., so zeigt die Zahl an, daß die Schärfe des Liniales $\frac{6}{10}$ über 65 einschneidet; denn die 6 Theile des Vernieres sind $6 + \frac{6}{10}$ des Winkelmessers gleich. Die 6 ganzen Theile sind schon unter den 65 begriffen, weil der Vernier rückwärts zählet und die $\frac{6}{10}$ der Ueberschuß. Wäre ein Theil des Winkelmessers $\frac{1}{2}$ Grad, so würde der Vernier $\frac{1}{10}$, 30 Minuten, d. i. die Winkel von 3 zu 3 Minuten angeben. Wollte man die Winkel von Minute zu Minute bestimmen, so müßte man bey derselben Theilung des Winkelmessers 31 Theile desselben auf 30 des Vernieres nehmen, weil alsdann jeder Verniertheil $= \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$ eines Theiles des Winkelmessers, also diesen um $\frac{1}{30}$ eines halben Grades, d. i. um eine Minute überträfe.

Der Vernier schränkt sich nicht bloß auf Kreisbögen ein, sondern kann mit gleichem Vortheil bey Theilungen von geraden Linien angewendet werden. Man findet ihn in neuern Zeiten bey Maschinen von mancherley Art sehr häufig angebracht.

3) Die Mikrometerschraube. Fig. 103. Eine feine metallene oder stählerne Schraube bc gehe mit ihrem obern cylindrischen runden Theil ab, durch eine in der Weite der Schraube durchbohrte unbewegliche Platte dd, und werde darinn durch einen von der Seite eingesteckten Stift e, welcher zum Theil in die Schraube zum Theil in die Platte eingreift, festgehalten, doch so, daß man die Schraube frey herumdrehen kann. Die Schraube bc selbst greife in ein hohles Gewinde einer beweglichen Platte hh, so erhellet, daß durch Vor- und Rückwärtsdrehen der Schraube bc die Platte hh von dd entfernt oder zu ihr hingebracht werden kann. Eine

solche Vorrichtung heißt im Allgemeinen eine **Zieh-schraube**, und wenn sie dazu dienet sehr kleine Verschiebungen von hh zu messen, eine **Mikrometerschraube**. Die letzte Forderung wird folgendermaßen bewerkstelliget. Die Länge von bc und die Anzahl von Schraubengängen in ihr sey bekannt; z. B. 100 Schraubengänge in einem Zoll, d. i. es erfordere 100 Umdrehungen der Schraube bis sich hh um bc = 1″ von dd entfernt oder zu dd hingeschoben habe. Die Schraubenumdrehungen und Theile derselben zu zählen, sey der Griff ff ein kreisförmiges Blatt, dessen Umfang in eine gewisse Anzahl gleicher Theile (z. B. 100.) getheilet ist, und zur Seite sey ein Zeiger g befestigt. Setzt man nun voraus, daß die Schraubenumgänge auf bc alle vollkommen gleich sind, so wird eine ganze Umdrehung von ff hh um $\frac{1}{100}$ Zoll verschieben, $\frac{1}{100}$ Umdrehung von ff giebt $\frac{1}{10000}$ Zoll Verschiebung von hh. Die Mikrometerschraube dienet, wenn sie mit der gehörigen Vollkommenheit gearbeitet worden ist, sehr kleine Theile zu messen. An dem Winkelmesser kann sie auf folgende Weise angebracht werden. hh sey das Dioptrenlinial, dd ein zweytes Linial, welches mit jenem durch die Mikrometerschraube verbunden ist, beyde drehen sich gemeinschaftlich um den Mittelpunct des Winkelmessers, dd allein kann durch eine besondere Schraube an jeder Stelle des Randes des Winkelkelmessers festgehalten werden. Gesetzt nun, man habe nach dem Schenkel eines Winkels visiret, indeß der Anfangspunct des Winkelmessers nach dem andern Schenkel gerichtet ist, die Schärfe des Dioptrenliniales schneide zwischen zwey Grade ein, man will wissen, wie viel übertrifft der Winkel den kleinern Grad. Man stelle dd fest, und schraube hh durch die Mikrometerschraube bis auf den nächsten Grad zurück, indem man die Schraubenumdrehungen und die Theile derselben zählet. Gesetzt es giengen 60 Umdrehungen auf einen Grad,

und ff sey in 60 gleiche Theile getheilet, man habe $12\frac{6}{60}$ Umdrehungen gezählet, so giebt dieß 12 Minuten 6 Secunden über den nächst kleinern Grad. Den Werth einer Schraubenumdrehung in Theilen des Winkelmessers findet man begreiflich dadurch, daß man zählet, wie viel dieser Umdrehungen auf einen oder etliche Theile der Eintheilung des Instruments gehen. Gesetzt es giengen 50 Umdrehungen auf einen Grad, so wäre der Werth einer Schraubenumdrehung $\frac{60}{50} = 1\frac{10}{50} = 1\frac{1}{5}$ Minuten, oder 1 Minute 12 Secunden.

166) **Anmerkung.** Eine besondere Art von Winkelmesser ist die **Boussole**, welche wegen ihres häufigen Gebrauchs in der Feldmeßkunst, hier nicht ganz übergangen werden darf, wenn gleich die vollständige Theorie derselben mehr in die mathematische Geographie gehöret. Ich fange mit der Erfahrung an, daß eine um ihren Mittelpunct bewegliche Magnetnadel, sich selbst überlassen, jederzeit nach Norden weiset, und daß ihre Richtungen an verschiedenen Orten genau mit einander parallel sind. Auf dem groß gedruckten Satz beruht ganz der geometrische Gebrauch der Magnetnadel, wie aus dem Folgenden erhellet. Aus dem Mittelpunct eines in 360 Grade getheilten Kreises WNOS Fig. 104. gehe ein feiner runder Stift senkrecht hervor, auf welchem eine Magnetnadel so ruhe, daß sie sich frey um denselben drehen könne, N sey das nach Norden, S das nach Süden zeigende Ende der Nadel. Der eingetheilte Kreis wird von der Seite gewöhnlich mit einem Ring umgeben, oben mit einem Glas bedeckt, unten aber mit einer viereckigten Platte, oder einem Kästchen befestigt, welche man auf ein Stativ gleich den übrigen Winkelmessern setzen kann. Eine Seite AB der Platte oder des Kästchens muß genau mit der Richtung der Nadel parallel seyn, an derselben wird ein Diopternlinial oder ein Perspectiv befestigt. Dieß sind die wesentlichsten Theile der zu geometrischem Gebrauch eingerichteten Boussole.

Einen Winkel ACN Fig. 105. durch die Boussole aufzunehmen, bringe man die Boussole an den Scheitelpunct des Winkels, und drehe sie bis die Visirlinie nach dem einen Schenkel des Winkels CA gerichtet ist, so wird sich während dem Herumdrehen der Punct n des eingetheilten Kreises eben so viel Grade unter der Magnetnadel weggeschoben haben, als AC von der Richtung der Nadel oder dem magnetischen Meridian abweicht, denn weil CN parallel mit ca, CA parallel mit cn ist, so ist ∠NCA = nca. Den Grad a des eingetheilten Kreises, auf welchen die Nadel weiset, bemerke man. Hierauf drehe man die Visierlinie der Boussole nach BC, und bemerke ebenfalls den Stand der Nadel an dem eingetheilten Kreise, so erhält man dadurch den Winkel NCB, oder die Abweichung der Linie CB von dem magnetischen Meridian. Einen mit der Boussole aufgenommenen Winkel zu Papier zu bringen, lege man die Visierlinie der Boussole an den auf dem Papier bestimmten oder willkührlich angenommenen Scheitelpunct des Winkels c Fig. 105 *, drehe hierauf die Boussole so lange an dem Punct c herum, bis die Nadel ca auf denselben Grad spielet, welchen man in der Lage cA auf dem Felde bemerkt hat, und ziehe hierauf die Linie ca. Eben so verfähret man mit Auftragung der Linie cb, so ist der Winkel acb auf dem Papier gleich dem Winkel ACB auf dem Felde. Denn weil die Richtungen der Magnetnadel untereinander parallel sind, so hat man NCA = nca, NCB = ncb, daher ACB = acb.

Wäre auf dem Papier schon die Lage des einen Schenkels ae gegeben, und man sollte die Lage des andern Schenkels cb finden, so lege man die Visierlinie der Boussole an den gegebenen Schenkel ca, und drehe das Papier mit der an ca liegenden Boussole so lange herum, bis die Nadel den auf dem Felde in a bemerkten Grad zeigt, so hat dadurch ca eine mit CA

parallele Lage erhalten, und man trägt alsdann cb auf die vorhin beschriebene Weise auf. Wenn man mehr als einen Winkel mit der Boussole aufzutragen hat, wie wenn man eine Figur aus ihrem Umfang verzeichnen wollte, so muß man, wenn man dem Papier einmal eine gewisse Lage gegeben hat, diese unverändert beybehalten, bis alle Winkel aufgetragen sind. Wollte man einen mit der Boussole aufgenommenen Winkel in Graden wissen, so darf man nur die durch den Stand der in Graden angegebenen Winkel NCA, NCB von einander abziehen, um ACB zu erhalten. Es ist aber dieses zum Auftragen der Winkel nicht nöthig, weil die Boussole die Winkel durch die Abweichung ihrer Schenkel von dem magnetischen Meridian bestimmt. Eben dadurch unterscheidet sich dieses Werkzeug von den übrigen Winkelmessern, man braucht bey ihm nicht von einem Winkel zum andern zurück zu visiren, und erspa-ret dadurch eine oft langweilige Stellung. Daher kann man die Boussole oft mit Vortheil in waldigen und bergichten Gegenden brauchen, wo keins der vorher beschriebenen Instrumente angewendet werden kann.

Nachtheile der Boussole sind. Die Magnetnadel zeigt nicht genau nach Norden, und (welches hier eigentlich nur in Betracht kommt) ihre Abweichung von dem wahren Norden ist nicht zu allen Zeiten und in allen Gegenden einerley. Bey uns ist sie gegenwärtig zwischen 19 und 20 Grad westlich. Doch beträgt diese Veränderung in der Abweichung der Magnetnadel in kleinern Entfernungen und kurzen Zeiträumen so wenig, daß man sie ausser Acht lassen kann. Von Zeit zu Zeit muß man sie aber aufs neue bestimmen. Dieß lehret die mathematische Geographie. 2) Die Magnetnadel wird vom Eisen angezogen und abgelenkt, man muß daher bey ihrem Gebrauche alles Eisen in der Nähe vermeiden. 3) Sie wird leicht vom Winde afficiret. 4) Sie darf nicht zu groß werden um beweglich zu bleiben.

daher der eingetheilte Kreis, an welchem sie hin und her spielet, nicht leicht kleinere Theile als Viertelgrade angiebt. Aus allem diesem zusammengenommen erhellet, daß die Boussole zwar keine sehr große Schärfe, aber desto mehr Bequemlichkeit bey dem Gebrauche gewähret, und daß sie oft da angewendet werden muß, wo man keins der übrigen Winkelinstrumente brauchen kann. Man verbindet die Boussole häufig mit dem Meßtisch und dem Astrolab, theils um bey der Aufnahme durch diese Werkzeuge die Lage einer Figur gegen die Weltgegenden zu bestimmen, theils auch um aus dem Stand der Magnetnadel den unverrückten Stand des Instrumentes während dem Aufnehmen zu beurtheilen. Solche Magnetnadeln, welche nur zur letztgenannten Absicht gebraucht werden, heißen Versicherungsnadeln.

167) Satz. Ein Winkel an der Peripherie, dessen Schenkel durch die Endpuncte einer Sehne gehen, heißt der Winkel des zur Sehne gehörigen Abschnitts. Wenn der Abschnitt größer als ein Halbkreis ist, so ist der Winkel im Abschnitt abc Fig. 106. spitz, denn er hat zu seinem Maaß den halben Bögen adc, also weniger als 90°. Der Winkel adc im kleineren Abschnitt als der halbe Kreis ist stumpf, da er die Hälfte von abc zu seinem Maaß hat.

Der Winkel am Umfang eines Halbkreises ist ein Rechter.

Alle Winkel in einem Abschnitte sind einander gleich.

Die Winkel in zwey entgegengesetzten Abschnitten einer Sehne machen zusammen zwey Rechte aus, denn sie haben zu ihrem Maaß die Hälfte des ganzen Umfangs.

Winkel am Umfang, welche gleiche Bögen zwischen ihren Schenkeln fassen, sind einander gleich, und ungleiche Winkel am Umfang verhalten sich wie die zwischen ihren Schenkeln liegenden Bögen.

168) Satz. Wird vom Berührungspuncte einer Tangente a b Fig. 107. eine Sehne a d gezogen, so ist der Winkel der Tangente mit der Sehne b a d halb so groß als der zur Sehne gehörige Winkel am Mittelpunct a c d, oder dem Winkel a e d im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

Man ziehe den Durchmesser a e, so ist b a e = R = b a d + d a e = d a e + d e a, weil d a e + d e a den Halbkreis a d e zwischen ihren Schenkeln fassen. Daher b a d = d e a = $\frac{1}{2}$ a c d.

169) Aufgabe. Ueber einer geraden Linie als Sehne eines Kreises einen Abschnitt zu beschreiben, wenn der Winkel im Abschnitte gegeben ist.

I. Der gegebene Winkel a e d Fig. 107. sey spitz. Man trage an die gegebene Linie a d den gegebenen Winkel e in a, fälle auf a b das Perpendikel a c, halbire a d, und fälle aus der Mitte ein Loth, bis es a c in c schneidet, so ist c der Mittelpunct des Kreises, aus welchem über a d der verlangte Abschnitt a c d beschrieben werden kann.

II. Der gegebene Winkel f sey stumpf. Man trage seine Ergänzung zu zwey Rechten an a, und verfahre wie vorher, so ergiebt sich der Mittelpunct c, aus welchem der verlangte Abschnitt a f d beschrieben werden kann.

III. Der gegebene Winkel d sey ein Rechter. Man halbire die gegebene Linie a e in c, und beschreibe aus c den Halbkreis a d e. Der Beweis folgt aus (146. 167 – 168.).

170) Anmerkung. Die vorhergehende Aufgabe ist von großem Nutzen in der practischen Geometrie, wenn man bey der Aufnahme einer Gegend aus drey gegebenen Puncten a, b, c Fig. 108. die Lage eines vierten d bestimmen soll, aus welchem man nach den

drey gegebenen Puncten sehen kann. Man messe die Winkel bey d, und sehe die gegebenen Linien ab, bc als Sehnen zweyer Kreise an, zu welchen die Winkel im Abschnitte bey d gegeben sind, so können die Kreise vermöge der vorhergehenden Aufgaben beschrieben werden, durch deren Durchschnittspunct die Lage von d bestimmt wird.

Wenn der Kreis, welcher über einer gegebenen Sehne ab Fig. 109. beschrieben werden soll, zu einem zu großen Halbmesser bc gehöret, daß dieses durch die gewöhnlichen Instrumente (23. Anmerk.) nicht bewerkstelliget werden kann, so dienet dazu folgende Vorrichtung, welche sich auf die bisher erwiesenen Lehrsätze vom Kreise gründet. ae, db sind zwey Linialе, welche bey d um ein Scharnier beweglich sind, und unter jedem gegebenen Winkel edb, vermittelst des eingetheilten Bogens f gestellt werden können. Ueberdieß muß in d ein feiner Stift, eine Blei- oder Reißfeder angebracht seyn. Um den Bogen adb zu beschreiben, mache man den Winkel $edb = \frac{1}{2}acb$ (welcher letzte Winkel entweder unmittelbar gegeben ist, oder doch aus der bekannten Größe von ab, und dem Halbmesser bc berechnet werden kann, wie die Trigonometrie lehret). Befestige in den Puncten a und b zwey feine Stifte, und fahre mit den Linialen ad, db an diesen Stiften hin und her, so wird der Punct d den verlangten Bogen adb beschreiben. Denn edb ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte von adb gleich, weil er die Ergänzung vom Winkel adb zu 180° ist (167), also $= \frac{1}{2}acb$, folglich adb der Winkel im Abschnitte selbst, durch dessen Bewegung an a und b der Bogen adb beschrieben wird.

171) Aufgabe. Ueber einer gegebenen Linie ab als Hypotenuse ein rechtwinklichtes Dreyeck abc Fig. 110. zu beschreiben. Man halbire ab in c, und be-

schreibe aus c über ab einen Halbkreis, so thut jeder Punct des Umfangs e der Aufgabe ein Genüge, indem $< aeb$ ein Rechter ist (167).

172) Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Linien eine mittlere Proportionallinie zu finden. Man trage die beyden gegebenen Linien auf entgegengesetzte Seiten von einem Punct d nach da, db Fig. 110. auf eine gerade Linie, halbire ab, und beschreibe über ab einen Halbkreis, richte über d ein Perpendikel auf, welches bey e in den Umfang des Halbkreises einschneidet, so ist de die gesuchte mittlere Proportionallinie (99).

Diese Aufgabe dienet dazu, jedes Rechteck, dessen Seiten ad, db gegeben sind, in ein gleich großes Quadrat über de zu verwandeln, und ist also die Ergänzung zu der geometrischen Quadratur geradlinichter Figuren (115. Anmerkung).

172) Satz. Wenn sich zwey gerade Linien innerhalb eines Kreises schneiden, so sind die abgeschnittenen Stücke der einen die mittlere Proportionallinien zwischen den abgeschnittenen Theilen der andern. Man verbinde die Endpuncte der sich schneidenden Sehnen durch die gerade Linien ad bc Fig. 111., so sind die Dreyecke aed, ceb ähnlich, weil die Winkel bey e als Scheitelwinkel gleich sind, und $< d = < b$, $< a = < c$, da es Winkel am Umfang sind, welche gleiche Bögen zwischen ihren Schenkeln fassen, daher die den gleichen Winkeln in beyden Dreyecken gegenüberstehenden Seiten proportional, und

$$de : ae = be : ce$$

Aus der Gleichheit der Produkte der mittlern und äussern Glieder in dieser Proportion folgt, daß die Rechtecke aus den abgeschnittnen Theilen jeder Sehne gleich sind. Wird die eine Sehne ab, durch die andere cd halbiret, so ist das Quadrat ihrer Hälfte ae dem Rechtecke aus ce, ed gleich. Wechselsweise können sich die

Sehnen nur halbiren, wenn sie beyde Durchmesser des Kreises werden.

173) Satz. Wenn zwey gerade Linien a b, a c sich ausserhalb dem Kreise in a Fig. 112* schneiden und von dem Kreise in e f b c geschnitten werden, so sind die durch den Kreis abgeschnittenen Theile, und die ganzen Linien von a ausgerechnet, umgekehrt proportional. Man ziehe e c, f b, so ist $< c = < b$, und $< a$ den Dreyecken a f b, a e c gemeinschaftlich, daher diese Dreyecke ähnlich, und die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten proportional, daher

$$a e : a c = a f : a b \text{ und}$$
$$a e : a f = a c : a b.$$

174) Satz. Wenn von zwey geraden Linien, welche von a aus Fig. 112. nach dem Kreis gezogen werden, die eine a g den Kreis berühret, die andere a b ihn schneidet, so ist die berührende Linie die mittlere Proportionale zwischen der schneidenden a b, und ihres ausserhalb dem Kreise liegenden Theiles. Denn man ziehe e g a b, so ist das Dreyeck a e g ähnlich dem Dreyecke a g b, weil $< g a b$ gemeinschaftlich und $< a g e = < g b a$ (168), daher die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten proportional und a e : a g = a g : a b. Dieser Satz läßt sich aus (172) auch so herleiten: Die Linie a b entferne sich von a c, indem der Winkel b a c wächst, so wird sie endlich in die Lage a g kommen, wo aus der schneidenden eine berührende Linie wird; während dem Wachsen des Winkels b a c rücken die Durchschnittspuncte e b immer näher zusammen, und fallen endlich bey g in einen Punct, alsdann ist sowohl a e, als a b = a g, und man hat statt der Proportion a f : a e = a c : a b die a f : a g = a g : a b.

175) Aufgabe. Eine gerade Linie so zu schneiden, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionallinie zwischen dem kleinern Abschnitte und der ganzen Linie

werde. ab Fig. 113. sey die zu schneidende gerade Linie. Man halbire sie in d, trage auf b das Perpendikel bc = ad, und ziehe aus c mit cb einen Kreis, trage ae nach g, so sind ag, gb die gesuchten Abschnitte der Linie ab. Denn aus (173)

ae : ab = ab : af, daher

ae : ab − ae = ab : af − ab Arithm.(102)

ae : bg = ab : ae, oder durch Verwechselung der Glieder,

bg : ae = ae : ab, oder

bg : ag = ag : ab.

176) Aufgabe. Ein gleichschenklichtes Dreyeck zu beschreiben, in welchem der Winkel an der Grundlinie noch einmal so groß ist, als der Winkel an der Spitze.

Es sey ab Fig. 114. in c so eingetheilet, daß der größere Abschnitt ac die mittlere Proportionale zwischen dem kleinern Abschnitte und der ganzen Linie ist. Man ziehe mit ab einen Kreis, und trage in denselben den größern Abschnitt ac als eine Sehne nach bd und ziehe ad, so ist abd das gesuchte gleichschenklichte Dreyeck, worin abd = 2 bad. Denn man ziehe cd und beschreibe um acd einen Kreis, so ist bd eine Tangente dieses Kreises, weil bc : bd (= ac) = bd : ba (173). ∠bdc = ∠cad (167. ∠bda = ∠bdc + cda = cad + cda aber bda = abd.

Folglich abd = cad + cda und ∠bcd als eine äusserer Winkel von △cad ebenfalls = ∠cad + cda. Daher cbd = bcd, bd = dc = ac also acd gleichschenklicht cad = cda, und bcd = cbd = abd = 2 cad.

177) Satz. Man theile den Umfang eines Kreises Fig. 115. in eine Anzahl gleicher Theile, ziehe die zu den gleichen Bögen ab, bd u. s. w. gehörigen Sehnen, so ist die Figur abdefg ein in dem Kreise be-

ſchriebenes regulaires Vieleck. Denn weil die Bögen gleich ſind, ſo ſind es auch die zu den Bögen gehörigen Sehnen, alſo die Seiten der Figur. Die Winkel gab, abd, welche zwey aneinander ſtoßende Seiten der Figur bilden, die Polygonwinkel, ſind gleich, weil es Winkel am Umfang ſind, welche gleiche Bögen zwiſchen ihren Schenkeln faſſen. Es iſt nämlich jeder dieſer Bögen wie bdefg dem ganzen Kreiſe weniger zwey gleichen Abſchnitten ga, ab gleich. Daher die Figur eine regulaire Figur (Erkl. 19.). Die Dreyecke acb, bcd u. ſ. w. ſind gleichſchenklicht und gleich, weil die drey Seiten in dieſen Dreyecken gleich ſind, und c iſt ſowohl der Mittelpunct der regulairen Figur als des Kreiſes. Die Winkel an der Spitze der gleichen Dreyecke bey c heißen Centriwinkel, die Winkel an der Grundlinie cab, cba $= \frac{1}{2}$ abd halbe Polygonwinkel der regulairen Figur.

178) Aufgabe. Um eine gegebene regulaire Figur einen Kreis zu beſchreiben. Man halbire zwey Polygonwinkel in a und b, ſo wird durch den Durchſchnittspunct ihrer Schenkel der Mittelpunct c der Figur beſtimmt, aus demſelben ziehe man mit ca einen Kreis, ſo iſt dieſes der um die Figur beſchriebene Kreis. Eine um den Kreis beſchriebene regulaire Figur. ABDEFG Fig. 115. wird verzeichnet, wenn man die Halbmeſſer ca, cb u. ſ. w. verlängert, auf eine Seite ab der in dem Kreis beſchriebenen Figur ein Perpendikel aus dem Mittelpunct ch fällt, an den Punct i deſſelben die Tangente AB ſetzt, und durch B, D, E u. ſ. w. die Parallelen BD, DE, EF, mit den gleichnamigen Seiten der in dem Kreis beſchriebenen Figur zieht.

179) Aufgabe. Den Polygonwinkel eines regulairen Winkels zu finden. Man dividire die Summe der Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks. Die Summe der Winkel der Figur iſt nach (79) zwey-

mal so viel Rechte als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte. Dieses gäbe z. B. für den Polygonwinkel des regulairen Sechseckes $\frac{(12-4)R}{6} = \frac{8}{6}R = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3}90^\circ = 120^\circ$.

180) Aufgabe. Den Centriwinkel einer regulairen Figur zu finden. Da die Summe aller Centriwinkel einer jeden regulairen Figur vier Rechten gleich ist, so theile man 4 R durch die Zahl der Seiten der Figur. Dieß gäbe den Centriwinkel des regulairen Sechseckes $\frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}90^\circ = 60^\circ$ halb so groß als den Polygonwinkel derselben Figur.

181) Anmerkung. Vermittelst der beyden vorhergehenden Aufgaben kann die nachstehende Tafel berechnet werden.

Zahl der Seiten.	Polygon-Winkel.	halb-Polygon-Winkel.	Centri-Winkel.
III	60°	30°	120°
IV	90°	45°	90°
V	108°	54°	72°
VI	120°	60°	60°
VII	$128\frac{4}{7}^\circ$	$64\frac{2}{7}^\circ$	$51\frac{3}{7}^\circ$
VIII	135°	$67\frac{1}{2}^\circ$	45°
IX	140°	70°	40°
X	144°	72°	36°
XI	147°	$78\frac{7}{11}^\circ$	$32\frac{8}{11}^\circ$
XII	150°	75°	30°

Vermittelst dieser Tafel, welche nach Belieben weiter fortgesetzt werden kann, läßt sich jedes regulaire Vieleck auf folgende Art in den Kreis verzeichnen: Man trage an den Mittelpunct des Kreises, vermittelst des Transporteurs, den Centriwinkel des verlangten Vielecks, so ergiebt sich die Seite ab Fig. 115. welche man in dem Umfang des Kreises so oft herumträgt als angeht.

geht. Sollte man über einer gegebenen Seite a b ein regulaires Vieleck verzeichnen, so trage man in a und b die halben Polygonwinkel, vermittelst des Transporteurs, durch den Durchschnittspunct ihrer Schenkel a c, b c wird der Mittelpunct des Kreises c gefunden, in dessen Umfang die Seite a b so oft enthalten ist, als das Vieleck Seiten hat. Diese Verzeichnung der regulairen Figuren geht ziemlich schnell von Statten, giebt aber keine sonderliche Genauigkeit. Genauer verfährt man, wenn man die Seiten der regulairen Vielecke aus dem Halbmesser des Kreises c a und den gegebenen Centri- und Polygonwinkel berechnet, und vermittelst eines genauen Maaßstabes in den Kreis trägt, oder die Dreyecke a c b Fig. 115. aus ihren drey Seiten construiret. Zu dieser Berechnung giebt die Trigonometrie Anleitung. Uebrigens ist die Verzeichnung der regulairen Vielecke aus ihren Centri- und Polygonwinkeln blos mechanisch, weil die Eintheilung des Kreises in Graden blos mechanisch bewerkstelligt werden kann. Geometrische Constructionen einiger ordentlichen Figuren lehren die folgenden Sätze.

182) Aufgabe. Ein reguläres Sechseck zu beschreiben. Da (180) der Centriwinkel des regulären Sechseckes dem halben Polygonwinkel gleich ist, so ist das Dreyeck a c b Fig. 115. gleichseitig. Man darf daher nur den Halbmesser des Kreises in seinen Umfang herumtragen, um ein Sechseck in dem Kreise zu beschreiben. Wäre die Seite gegeben, über welcher das Sechseck beschrieben werden sollte, so verzeichne man mit derselben ein gleichseitiges Dreyeck a b c, und aus der Spitze c desselben den Kreis, in welchem die Seite herumgetragen werden kann.

183) Aufgabe. Ein reguläres Dreyeck in einen Kreis zu beschreiben. Man beschreibe das reguläre Sechseck Fig. 116. und verbinde je zwey Seiten desselben durch eine gerade Linie.

184) Aufgabe. Aus der Seite eines regulären Vielecks die Seite des Vielecks zu finden, welches noch einmal so viel Seiten hat. Man halbire den Centriwinkel des Vielecks a c b, so ist die Sehne seiner Hälfte a d die gesuchte Seite des Vielecks von noch einmal so viel Seiten. Durch Wiederholung dieser Aufgabe findet man aus der Seite des Sechseckes die Seite des 12, 24, 48, 96 Eckes u. s. w.

185) Anmerkung. Alles, was durch geometrische Construction gegeben ist, läßt sich auch berechnen. Bey der vorstehenden Aufgabe wird dieß aus Folgendem erhellen. Es sey das Verhältniß der Seite des Vielecks a b Fig. 116. gegen den Halbmesser a c in Zahlen gegeben, man sucht das Verhältniß des Halbmessers zur Seite des Vieleckes von noch einmal so viel Seiten. Weil a c, a b in Zahlen gegeben sind, so ist auch $af = \frac{1}{2} ab$ in Zahlen bekannt, daher $cf = \sqrt{(ac^2 - af^2)}$, also auch $fd = cd - cf = ac - cf$, und ferner $ad = \sqrt{(af^2 + df^2)}$, welches die gesuchte Seite des Vieleckes von doppelt so viel Seiten in Zahlen giebt. Es sey z. B. der Halbmesser $ac = 1000$, a b die Seite des Sechsecks ebenfalls $= 1000$, so findet sich die Seite a d des Zwölfeckes durch folgende Rechnung $cf = \sqrt{1000^2 - 500^2} = \sqrt{750000} = 866,4 \ldots$, $fd = 1000 - 866,4 = 133,6$, $ad \sqrt{500^2 + 133,6^2} = \sqrt{271199,36} = 520,9 \ldots$

Die Quadratwurzeln, welche irrational sind, sind bloß auf eine Decimalstelle berechnet.

186) Aufgabe. In einen Kreis ein reguläres Viereck zu zeichnen. Man setze zwey Durchmesser a b, c d Fig. 117. senkrecht auf einander und verbinde ihre Endpuncte durch gerade Linien. Aus dem Viereck construiret man nach (193) das Achteck, Sechzehneck, Zweyunddreyßigeck u. s. w. Dieß ist die zweyte Reihe von Polygonen, welche geometrisch construiret werden können.

187) **Aufgabe.** Ein reguläres Fünfeck in den Kreis zu beschreiben. Man beschreibe einen gleichschenklichten Triangel in den Kreis, dessen Winkel an der Grundlinie noch einmal so groß sind als der Winkel an der Spitze, und halbire die Bögen der Winkel an der Grundlinie, so ist dadurch der Umfang des Kreises in fünf gleiche Theile getheilet. Die erste Forderung zu bewerkstelligen, beschreibe man nach (175) ein gleichschenklichtes Dreyeck von den gegebenen Eigenschaften, dessen Spitze im Mittelpunct des Kreises liegt abd, Fig. 114. und 118, trage bd nach be und ziehe de, so ist dieses die Seite des in dem Kreis beschriebenen regulären Fünfecks. Denn man verlängere ba nach c und ziehe ec, dc. so ist $< ecd = 2 < bcd = < bad$ und $ec = dc$, also Δecd ähnlich Δabd, daher Bogen $dgc = 2 dfc = 2 ebd$. Folglich $ebd = \frac{1}{5}$ des Umfangs. bd ist die Seite des regulären Zehnecks. Aus diesem kann das Zwanzigeck, Vierzigeck u. s. w. die dritte Reihe der ordentlichen Vierecke construiret werden.

188) **Satz.** Der Centriwinkel des Funfzehnecks ist dem halben Unterschiede zwischen dem Centriwinkel des Dreyecks und Fünfecks gleich. Denn es ist die Hälfte dieses Unterschiedes $\frac{1}{2}\left(\frac{4R}{3} - \frac{4R}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{20R}{15} - \frac{12}{15}R\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{15}R\right) = \frac{4}{15}R = \frac{4R}{15} =$ Centriwinkel des Funfzehnecks. Hieraus fließet folgende geometrische Construction für das Fünfzehneck. Man beschreibe in einem Kreis Fig. 118. das regulaire Fünfeck und das regulaire Dreyeck, so daß beyde einen Winkelpunct c miteinander gemein haben, ziehe den Centriwinkel des Fünfecks cag, und des Dreyecks cah, so ist hag der Unterschied von beyden. Diesen halbire man in i, giebt hi für die Seite des Fünfeckes. Aus

dem Fünfzehneck findet sich das Dreyßigeck, Sechzigeck u. s. w. die vierte Reihe von regulairen Vielecken, welche geometrisch verzeichnet werden können.

189) Satz. Regulaire Figuren von einer gleichen Anzahl Seiten sind ähnliche Figuren. Die Winkel sind alle gleich, und die Seiten verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise ga, gA Fig. 119. worin sie beschrieben sind, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke gab, gAB. Die Umfänge der Vielecke, als gleiche Vielfache der Seiten, verhalten sich wie die Seiten, wie die Halbmesser der Kreise = ga: gA, der Inhalt der Vielecke wie die Quadrate ihrer Seiten, oder wie die Quadrate der Halbmesser der Kreise, worin sie beschrieben sind (144).

190) Satz. Je größer die Anzahl der Seiten eines regulairen in den Kreis beschriebenen Vielecks ist, desto näher kommt sein Umfang dem Umfange, und sein Inhalt dem Inhalte des umschriebenen Kreises. Dieses wird folgendergestalt erwiesen. Der Umfang des Vielecks von noch einmal so viel Seiten ist größer als der Umfang des Vielecks von halb so viel Seiten; $ad + bd > ab$ Fig 116. daher bd größer als $\frac{1}{2}$, ab größer als bf, folglich $6\,bd > 6\,bf$ oder $6\,bd > 6\,(\frac{1}{2}\,ab)$ größer als 3 ab; eben so $bh + hd > bd$, daher $bh > \frac{1}{2}\,bd$, folglich $12\,bh > 6\,bd$, oder der Umfang des Zwölfeckes größer als der Umfang des Sechsecks. Diese Schlüsse können ohne Ende fortgesetzt werden. Da nun der Umfang des Kreises ausserhalb dem Umfange aller in denselben beschriebenen Vielecke fällt, so ist er größer als die Umfänge aller dieser Vielecke. Es wächset aber vermöge des eben Erwiesenen der Umfang eines Vielecks mit der Zahl seiner Seiten ohne Ende, folglich muß er dem Umfange des Kreises ohne Ende näher kommen, also auch so nahe kommen können, daß der Unterschied zwischen

beyden als verschwindend angesehen werden kann. Diesen Satz drückt man kurz so aus: **der Umfang eines Vieleckes von unzählig vielen Seiten ist dem Umfange des Kreises gleich.**

Daß der Inhalt eines regulairen Vieleckes sich dem Inhalte des umschriebenen Kreises immer mehr nähert, je größer die Anzahl der Seiten des Vielecks ist, erhellet aus dem Anblick der Figur. Der Inhalt des regulairen Sechseckes übertrift den Inhalt des regulairen Dreyecks um den dreyfachen Triangel a b d, und wird von dem regulairen Zwölfeck um den sechsfachen b h d übertroffen. Auf diese Weise geht es ohne Ende fort; der Inhalt der Vielecke wächset mit der Anzahl ihrer Seiten, und nähert sich beständig dem Kreise als der letzten Gränze aller Vielecke, welche in ihm beschrieben werden können. Man drückt daher diesen Satz auch kürzer so aus. **Der Inhalt des Kreises ist dem Inhalte eines regulairen Vielecks gleich, welches unzählig viele Seiten hat.**

191) Aufgabe. Den Inhalt eines jeden regulairen Vielecks zu finden.

Man rechne den Inhalt des Dreyecks, aus dessen Grundlinie über einer Seite und dessen Spitze in dem Mittelpuncte des Vielecks liegt, und nehme den Inhalt dieses Dreyeckes so vielmal als das Vieleck Seiten hat. Der Inhalt des regulairen Dreyecks Fig. 116. z. B. ist $= 3\,acb = 3\,ab.\frac{1}{2}cf$, d. i. der Umfang des regulairen Dreyecks multipliciret in das halbe Perpendikel aus dem Mittelpunct auf eine seiner Seitenlinien. Der Inhalt des regulairen Sechseckes ist $= 6\,dcb = 6\,db.\frac{1}{2}cg =$ Umfang des Sechseckes in die halbe Höhe desselben (denn so nennt man das Perpendikel aus dem Mittelpunct auf eine der Seitenlinien des regulairen Vieleckes). Aus diesen Beyspielen erhellet, daß das Produkt aus dem Umfange eines regulairen

Vieleckes in seine halbe Höhe der allgemeine Ausdruck für den Inhalt jedes Polygons ist.

Beyspiel. Es sey die Seite des regulairen Sechseckes = 1000, so ist die Höhe cg desselben = $\sqrt{cb^2 - bg^2} = \sqrt{1000^2 - 500^2} = 866,4$ (183) und der Inhalt = $6 . 1000 . \frac{866,4}{2} = 6000 . 433,2 = 2599200,0$.

Die Höhe des regulairen Dreyecks cf ist kleiner als die Höhe des regulairen Sechseckes cg, und diese wieder kleiner als die Höhe des regulairen Zwölfeckes, weil sich die Seite des Vieleckes von mehr Seiten immer mehr dem Umfange des Kreises nähert. Die Höhe des Vieleckes von unzählig vielen Seiten, oder die Höhe des Kreises selbst ist der Halbmesser, weil dieser senkrecht auf jeder Stelle seines Umfangs ist.

192) Satz. Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus seinem Umfang in die Hälfte seines Halbmessers.

Denn der Kreis ist ein regulaires Vieleck von unzählig vielen Seiten, dessen Umfang dem Umfange des Kreises, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist.

193) Anmerkung. Könnte man den Umfang eines Kreises in eine gleich große gerade Linie verwandeln (ihn rectificiren), und man verzeichnete ein Dreyeck, dessen Grundlinie a b Fig. 120. den Umfang, und dessen Höhe a c dem Halbmesser des Kreises gleich wäre, so würde der Inhalt dieses Dreyecks dem Inhalte des Kreises gleich seyn. Da man nun jedes Dreyeck nach (112) in ein Rechteck, und dieses nach (171) in ein Quadrat verwandeln kann, so wäre dadurch die Quadratur des Kreises, ein eben so berühmtes, als berüchtigtes Problem, bewerkstelliget. Aber geometrisch genau läßt sich der krumme Umfang des Kreises nicht

rectificiren, arithmetisch so genau als man nur verlangen kann.

Es wird hier hinreichend seyn den Weg zu zeigen, welchen bereits Archimedes betreten hat, um das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser des Kreises in Zahlen auszudrücken.

Durch ähnliche Schlüsse wie (189) kann erwiesen werden, daß der Umfang des um den Kreis beschriebenen Vielecks Fig. 115. von noch einmal so viel Seiten kleiner ist, als der Umfang des um den Kreis beschriebenen Vielecks von halb so viel Seiten, und daß der Umfang dieser Vielecke dem Umfange des Kreises desto näher kommt, je größer die Anzahl der Seiten aber größer als der Umfang des Kreises für jede bestimmte Anzahl von Seiten ist. Berechnet man den Umfang zweyer regulairen Vielecke, von gleich viel Seiten, deren eins in das andere um den Kreis beschrieben ist, so ist jenes Umfang kleiner, dieses Umfang größer als der Umfang des Kreises. Beyder Umfänge verhalten sich gegeneinander = ch : ci, und kommen einander desto näher, je näher das Perpendikel ch dem Halbmesser kommt, d. i. je größer die Anzahl der Seiten wird. Man erhält dadurch zwey Gränzen, zwischen welche der Umfang des Kreises fällt, welche Gränzen einander immer näher, und endlich so nahe kommen können, daß man jede für den Umfang des Kreises annehmen darf. Archimedes hat auf die (184) erläuterte Weise den Umfang des in und um den Kreis beschriebenen 96 Ecks berechnet, und den kleinen Unterschied dieser beyden Gränzen schon als verschwindend angesehen. Die erste, welche dem Kreis am nächsten liegt, giebt den Umfang $3\frac{10}{71}$, die andere $3\frac{1}{7}$, wenn der Durchmesser 1 ist. Man nimmt gewöhnlich das letzte Verhältniß, weil es sich in kleinen Zahlen ausdrücken läßt, und schreibt dafür: 7 : 22, welches = 1 : $3\frac{1}{7}$ ist. Ludolph von Cölln

hat die Berechnung dieses Verhältnisses schon sehr viel weiter getrieben und gefunden, daß wenn der Durchmesser 1, der Umfang 3, 141592 653589 793238 462643 383879 50.... ist, zu groß, wenn die letzte Ziffer 1, zu klein, wenn sie 0 ist. In neuern Zeiten hat man die Rectification des Kreises durch Kunstgriffe der höhern Rechenkunst auf einem weniger mühsamen Weg, wie der von Archimed eingeschlagene, bewerkstelligt. Dadurch hat man die Berechnung des Verhältnisses vom Umfang zum Durchmesser sehr viel weiter getrieben. Scherwin hat es bis auf 72, Machin auf 120, und Lagny bis auf 127 Decimalstellen erweitert. Aber schon das Ludolphische Verhältniß ist mehr als hinreichend, die größten Kreise auf der Erde und am Himmel, von vielen Millionen Meilen mit der Genauigkeit eines Zolles auszurechnen. Hieraus erhellet, welche vergebliche und thörichte Bemühung es ist, wenn noch heutzutage Leute kommen, welche das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang in kleinern Zahlen, welche sich nicht auf jene Ludolph von Cöllnische zurückbringen lassen, angeben wollen. Gewöhnlich bedienet man sich nur der drey ersten Ziffern von dem Ludolphischen Verhältniß 1 : 3, 14 oder 100 : 314, wodurch man aber keine größere Schärfe als durch das archimedische Verhältniß bekommt, denn es ist 7 : 22 = 1 : 31428 oder Archimedes Verhältniß ist um 0,0013 zu groß, das gewöhnliche 100 : 314, um 0,00159 zu klein, der Kreis fällt zwischen beyde, aber das erste kommt ihm etwas näher. Zuweilen bedienet man sich auch des von Adrian Metius angegebenen Verhältnisse = 113 : 355, welches bis auf Milliontheile richtig, aber wegen der Primzahl 113 etwas unbequem ist. Man hat nämlich

113 : 355 = 1 : 3, 1415929 die letzte Ziffer sollte 6 seyn.

194) Aufgabe. Den Inhalt eines gegebenen Kreises zu berechnen.

1) Wenn der Durchmesser des Kreises gegeben, der Umfang unbekannt ist. Man berechne nach einem der Verhältnisse (193) aus dem Durchmesser den Umfang, und multiplicire denselben mit dem halben Halbmesser oder mit dem vierten Theil des Durchmessers, so erhält man den Inhalt des Kreises.

2) Wenn der Umfang bekannt, der Durchmesser aber unbekannt ist. Man berechne aus dem Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser (193) und dem gegebenen Umfang den Durchmesser, und verfahre hierauf wie 1).

Beyspiel zu 1). Der Durchmesser sey 176 Fuß, wie groß ist der Inhalt des Kreises?

$$1 : 3{,}14\ldots = 176 : \text{Ges.}$$

giebt für den Umfang 552,64. Diese Zahl mit $\frac{176}{4} = 44$ multiplicirt den Inhalt 24316,16 Quadratschuhe. Weil 1 nicht dividiret, so ist der Umfang des Kreises das Produkt aus seinem Durchmesser in das Peripherieverhältniß P. (so nenne ich der Kürze wegen die Zahl 3,14....). Im Exempel ist der Umfang 176 . 3, 14.... Dieß mit dem vierten Theil des Durchmessers multiplicirt, giebt den Inhalt:

$$\tfrac{1}{4}\ 176 \cdot 176 \cdot 314 \ldots.$$

Weil in diesem Ausdruck das Peripherieverhältniß für jeden Durchmesser unverändert bleibt, so schreibe man ihn so: $\frac{1}{4} \cdot 3{,}14\ldots \times 176^2$, so übersieht man, daß man den Inhalt eines Kreises, ohne seinen Umfang zu berechnen, finden kann, wenn man das Quadrat seines Durchmessers mit dem vierten Theil des Peripherieverhältnisses multiplicirt. Es ist aber $\frac{1}{4}P = 0{,}785398163397\ldots$ von welcher Zahl man nach Belieben so viel Stellen nehmen kann, als zur verlangten Schärfe erforderlich

ist. Gewöhnlich wird man sich bey den drey ersten befriedigen können.

Der Durchmesser sey 12, was ist der Inhalt? Antw. $= 12^2 . 0,785 = 113,04$.

Beyspiel zu 2). Der Umfang sey 30 Fuß, wie groß ist der Durchmesser und Inhalt des Kreises? Man sage $3,14 : 1 = 30 : \text{Ges.}$ giebt den Umfang $\frac{1.30}{3,14....}$ Diesen mit $\frac{1}{4}30$ multipliciret den Inhalt $= \frac{30}{3,14} . \frac{1}{4} . 30 = \frac{1}{4} . 30^2 : 3,14....$ Weil es bequemer ist, mit einem Decimalbruch multipliciren, als durch einen Decimalbruch dividiren, so kann man den vorstehenden Ausdruck auch so schreiben: $\frac{1}{4} 30^2 . \frac{1}{3,14....}$ Denn es ist einerley, ob man mit 3,14 dividiret, oder mit dem Bruch $\frac{1}{3,14}$ multipliciret. Da nun dieser Quotient für jeden gegebenen Umfang unveränderlich bleibt, so kann man ihn ein- für allemal berechnen. Er ist $0,318309886183.... = \frac{1}{p}$. Hiernach wäre der Durchmesser im Beyspiel $= 0,318 . 30 = 9,540$ Fuß, der Inhalt $= \frac{1}{4} 30^2 . 0,318 = \frac{1}{4} . 286,200 = 71,54$ Quadratfuß.

195) Anmerkung. Der Fall 2) der vorstehenden Aufgabe kommt in der Anwendung häufig vor, wenn man aus dem gemessenen Umfang eines Baums, einer Säule, und dergleichen, den Durchmesser und den Querschnitt berechnen soll.

196) Aufgabe. Den Inhalt des Ausschnitts und Abschnittes eines Kreises zu berechnen.

Der Ausschnitt bcad Fig. 116. verhält sich zum ganzen Kreis, wie sich der Bogen adb, oder zugehö-

rige Winkel b c a zu 360° verhält. Man berechne daher, um den Ausschnitt zu erhalten, den ganzen Kreis, und sage 360° : b c a = Kreis, Ausschn. Den Abschnitt b d a zu finden, berechne man den zum Abschnitt gehörigen Ausschnitt und das Dreyeck b c a, ziehe dieses von jenem ab, so bleibt der Abschnitt übrig.

Beyspiel. Den Aus- und Abschnitt des zum regulairen Dreyeck gehörigen Centriwinkels zu berechnen, wenn der Halbmesser = 1000 ist. Der Kreis ist nach (193) $2000^2 \cdot \frac{1}{4} P = 4000000 \cdot 0{,}785398 = 3141592$, also der Ausschnitt $\frac{1}{3} \cdot 3{,}141592 = 1{,}047197$. Das Dreyeck a c b zu berechnen, muß man die Höhe c f und Grundlinie a b wissen. Beyde lassen sich hier durch Rechnung finden. In andern Fällen muß man sie durch unmittelbare Messung oder trigonometrische Rechnung bestimmen. Es ist c f = f d = $\frac{1}{2}$ c d, weil b d die Seite des regulairen Sechseckes und c b d ein gleichseitiges Dreyeck ist. b f hat man = $\sqrt{b c^2 - c f^2} = \sqrt{1000^2 - 500^2} = \sqrt{750000} = 866{,}4$, also b a = 2 b f = 1708,8 und Dreyeck c b a = $\frac{1}{2}$ b a . c f = 854,4 . 500 = 427200,0, folglich der Abschnitt = 3141592 — 427200 = 2714392.

197) Anmerkung. Eben so, wie man den Kreis (192. Anmerk.) als ein Dreyeck betrachten kann, dessen Grundlinie der Umfang und dessen Höhe der Halbmesser ist, so läßt sich jeder Ausschnitt als ein Dreyeck ansehen, dessen Grundlinie dem Bogen des Ausschnitts, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist. Könnte man jeden Bogen, dessen Winkel in Graden gegeben ist, in Theilen des Halb- oder Durchmessers finden, so erhielte man den Inhalt eines jeden Ausschnittes, ohne den Inhalt des Kreises zu berechnen, wenn man die Länge seines Bogens mit dem halben Halbmesser multiplicirte. Dieses zu bewerkstelligen dienen folgende Sätze:

Wenn der Halbmesser 1 ist, so ist der Umfang 2. 3, 14 ... = 2 P, denn man hat folgende Proportion 1 : P = 2 : Ges. = 2 P (193), also der halbe Umfang 3, 14.... = P, um nun irgend einen in Graden, Minuten, Secunden u. s. w. gegebenen Bogen in Theilen des Halbmessers auszudrücken, sage man

180° : 3, 14 ... (= P) = 1° : Ges. und
180 . 60′ : 3, 14 .... = 1′ : Ges.
180 . 60 . 60″ : 3, 14 = 1″ : Ges.

Dieß giebt die Länge

von 1 Grad = 0,017453292519 ....
von 1 Minute = 0,000290888208 ....
von 1 Secunde = 0,000004848136 ....

von welchen Zahlen man so viele Ziffern nehmen kann, als die jedesmalige Schärfe erfordert. Hierdurch lassen sich die Bögen eines jeden Winkels in Theilen des Halbmessers finden. Z. B. wie groß ist der Bogen von 50° 10′ 12″?

50° = 50 . 0,01745 ... = 0,87250
10′ = 10 . 0,00029 ... = 0,00290
12″ = 12 . 0,0000048 = 0,0000576
50° 10′ 12″ = 0,8754576

Wenn der Halbmesser 1 ist. Wäre der Halbmesser 40 Fuß, so dürfte man die gefundene Zahl nur mit 40 multipliciren, um den Bogen in Fußen zu finden. Den Winkel zu finden, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist, sage man

3, 14 .... 180° = 1 : Ges.

giebt den Winkel $\frac{180}{3,14....}$ = 57° 17′ 44″ 48‴ u. s. w. = 206264,8 Secunden. Diese Zahl wird sehr häufig in mathematischen Rechnungen gebraucht, um Bögen

in Längenmaaß, oder umgekehrt Längenmaaß in Bögen zu verwandeln.

Man fragt z. B. wie groß ist ein Bogen von 100 Fuß, wenn der Hälbmesser = 1000 Fuß ist? Weil die Länge des Bogens $\frac{1}{10}$ des Halbmessers ist, so erhält man das gesuchte Winkelmaaß, wenn man die obenstehende Zahl durch 10 dividiret, = 20626,48 Sec. $5^{\circ}\,43'\,46,''\,48$.

198) Satz. Kreise, als ähnliche Figuren, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, oder Halbmesser. Die Umfänge zweyer mit verschiedenen Halbmessern beschriebenen Kreise verhalten sich wie die Halbmesser, oder wie die Durchmesser. Diese beyden Sätze folgen aus (193) auch also: Man nenne die Durchmesser zweyer Kreise d und D, die Zahl 3,14.... = P, so ist der Umfang des einen Kreises d. P, des andern D. P, der Inhalt des einen Kreises $\frac{1}{4}$ P. d^2, des andern $\frac{1}{4}$ P. D^2, also

das Verhältniß der Umfänge = d. P : DP = d : D

das Verhältniß des Inhaltes = $\frac{1}{4}$ P d^2 : $\frac{1}{4}$ P D^2 = d^2 : D^2

weil die Verhältnisse nach Arithm. (100) sich nicht ändern, wenn man beyde Glieder durch einerley Größe dividiret.

199) Aufgabe. Kreise und ähnliche Polygone zu addiren, oder zu subtrahiren, daß die Summe oder der Unterschied wieder ein Kreis oder ähnliches Polygon werde. Man beschreibe einen rechten Winkel, und verfahre mit den Halbmessern der gegebenen Kreise, oder mit den Seiten der Polygonen, wie man §. 140. 141. bey Addirung und Subtrahirung von Quadraten verfahren ist.

200) Anmerkung. Aehnliche Polygone und Kreise nach gegebenen Verhältnissen zu verzeichnen, verfährt man wie (145) gelehrt worden ist. Die Verzeich-

nung ähnlicher Polygone zu erleichtern, hat man auf den beweglichen Schenkeln des Proportionalzirkels eine Linie nach den Verhältnissen der Polygonseiten (gewöhnlich vom Dreyeck bis zum Zwölfeck) eingetheilet. Sie ist überschrieben Linea Polygonorum (Linie der Polygonen). Ihr Gebrauch ist folgender: Wenn die Seite des zu verzeichnenden Polygons (z. B. des Siebenecks) gegeben ist, so fasse man dieselbe in den Zirkel, und steche dieselbe von 7 zu 7, in dem man dem Proportionalzirkel die gehörige Oeffnung giebt. Hierauf steche man von 6 zu 6 (weil die Seite des Sechseckes dem Halbmesser gleich ist) bey unverändertem Winkel des Proportionalzirkels, und beschreibe mit dieser Linie einen Kreis, so kann in demselben die gegebene Seite des Polygons (Siebeneck) herumgetragen werden. Wäre der Kreis gegeben, in welchen das Vieleck verzeichnet werden sollte, so fasse man den Halbmesser desselben in den Zirkel, und steche ihn auf dem Proportionalzirkel von 6 zu 6 ab. Hierdurch erhält der Proportionalzirkel die gehörige Oeffnung, und man darf nur die Seite des Vielecks, welches in den Kreis verzeichnet werden soll, auf der Linie der Polygonen abnehmen.

Die Stereometrie oder Meßkunst der Körper.

I.

Von der Lage der Ebenen.

1) Satz. Durch eine gerade Linie a b Fig. 1. lassen sich unzählig viele Ebenen legen. Sobald ausser der geraden Linie noch ein Punct c gegeben ist, so wird dadurch die Lage einer einzigen Ebene bestimmt. Diesen Satz zu erläutern denke man sich unter c a b h eine feste Ebene, wie die Fläche eines Linials, a b sey eine der scharfen Kanten desselben, man halte das Linial an den Puncten a und b fest und drehe es um a b, so wird man ihm unzählig viele Lagen c a b h, d a b i u. s. w. geben können, indeß die Schärfe a b unveränderlich einerley Lage behält. Ist nun irgend ein Punct c ausserhalb a b gegeben, wodurch die Fläche des Linials gehen soll, so wird dadurch zugleich eine Lage des Linials unter den unzählig vielen, welche durch a b gehen, bestimmt. Statt des Liniales denke man sich eine geometrische Ebene c a b, welche sich um eine in ihr gezogene Linie a b drehet, so gelten von ihr dieselben Schlüsse, und man hat alles auf rein mathematische Begriffe zurückgebracht.

Da zwey Puncte a, b die gerade Linie a b bestimmen, so drückt man den obigen Satz auch so aus: drey Puncte a b c, welche nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen eine einzige Ebene.

2) Anmerkung. Der vorstehende Satz giebt den Grund von einer bekannten Erfahrung an: daß Körper, welche auf drey Füßen ruhen, auf jedem auch noch so unebenen Boden fest stehen. Vier Puncte können

in einer Ebene liegen, sie müssen aber nicht. Zwey zusammenstossende gerade Linien ca, ab Fig. 1. liegen immer in einer Ebene, denn sie werden durch drey Puncte c, a, b, bestimmt. Ein geradliniger Winkel ist zugleich ein ebener Winkel. Ein krummliniger Winkel kann, muß aber nicht, eben seyn.

3) Satz. Zwey Ebenen, die einander schneiden, schneiden sich in einer geraden Linie. Denn schnitten sie sich in einer krummen, so könnte man in derselben drey Puncte annehmen, welche nicht in einer geraden Linie lägen, und durch diese müßten zwey verschiedene Ebenen gehen, wider (1 Satz).

4) Erklärung. Der Neigungswinkel zweyer sich schneidenden Ebenen cab, dab Fig. 1. wird bestimmt, wenn man auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt ab in jeder Ebene von einem willkührlichen Punct a die Perpendikel ac, ad ziehet, durch den spitzen Winkel cad, welchen diese beyden Perpendikel mit einander machen.

Ist der Neigungswinkel ein Rechter, so stehen die beyden Ebenen senkrecht auf einander.

5) Erklärung. Eine gerade Linie ab steht senkrecht (lothrecht) auf einer Ebene, wenn sie mit allen Linien bc, bd, be, welche man in der Ebene AB Fig. 2. von dem Punct b aus, wo die Linie die Ebene trifft, ziehen kann, rechte Winkel macht.

6) Anmerkung. Man setze ein rechtwinklichtes hölzernes Dreyeck abc Fig. 2. so auf einen ebenen Tisch, daß der eine Kathet bc in die Ebene des Tisches falle, und sich um b, wie um den Mittelpunct eines Kreises drehen könne, ohne aus dieser Ebene zu kommen, so wird ab sich in sich selbst (ohne seinen Ort zu ändern) drehen, indeß bc nach und nach in die Lagen bg, bd, be u. s. w. kommt. ab steht unter diesen Umständen lothrecht

lothrecht auf der Ebene des Tisches. Denkt man sich statt der Ebene des Tisches die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, und hängt über derselben einen schweren Körper an einen Faden auf, so macht die Richtung des Fadens mit der Oberfläche des Wassers nach allen Gegenden rechte Winkel und eben weil man einen solchen an einen Faden aufgehängten schweren Körper ein Loth nennt, heißt diese Richtung die lothrechte. Die Oberfläche des Wassers ist eine horizontale Ebene. Der Geometer denkt sich Lothe nicht bloß auf horizontalen, sondern auf Ebenen von jeder Lage, und da fällt die lothrechte Richtung nicht immer mit der Richtung der Schwere zusammen. Man muß also bey der allgemeinen Erklärung (5) bleiben.

7) Erklärung. Eine Linie a b Fig. 3. ist gegen eine Ebene geneigt, wenn sie mit irgend einer Linie b c in dieser Ebene einen spitzen Winkel a b c macht. Eine Linie kann gegen eine Ebene geneigt seyn, und doch mit einer Linie (aber nicht mit mehr) in dieser Ebene einen rechten Winkel machen. Man denke sich ein rechtwinklichtes Dreyeck a b c (Fig. 3.) von einer festen Materie, setze den einen Schenkel b d desselben auf die Ebene, so bleibt a b d ein rechter Winkel, man mag das Dreyeck gegen die Ebene neigen wie man will. Der Neigungswinkel des Dreyecks gegen die Ebene ist zugleich die Neigung der Linie a b gegen die Ebene. Man bestimmt nämlich die Neigung einer Linie gegen eine Ebene, wenn man von dem Punct b, wo sie die Ebene trifft, ein Perpendikel b d in der Ebene auf die Linie a b, und auf b d ein anderes Perpendikel b c ebenfalls in der Ebene zieht. Der spitze Winkel, welchen a b mit b c macht, ist die Neigung von a b gegen die Ebene.

8) Satz. Wenn eine Linie a b Fig. 2. auf zwey Linien b d, b c in einer Ebene perpendikulär ist, so ist sie auf allen Linien, welche man von b aus in der Ebene ziehen kann, perpendikulär, und steht auf der Ebene

lothrecht. Denn zwey gerade Linien bd, bc, welche einen Winkel bilden, sind immer in einer Ebene, und bestimmen die Lage dieser Ebene (2. Anmerkung). Dieß zu erläutern, denke man sich wieder das rechtwinklichte feste Dreyeck abc Fig. 2, und lasse dasselbe sich um ab drehen, wenn es sich nur im mindesten gedreht hat, und bc ist in die Lage bg gerückt, ohne aus der Ebene AB gekommen zu seyn, so kann es sich nun weiter drehen, und die Linie bc wird in den Lagen bd, be immer in der Ebene AB bleiben. Der Winkel cbg bestimmt die Lage der ganzen Ebene eben so gut, als der Winkel cbd, oder jeder andere in dieser Ebene. In der Ausübung nimmt man freylich den Winkel cbg, durch welchen man die lothrechte Lage einer Linie gegen eine Ebene bestimmen will, nicht gerne sehr klein an, sondern man zieht gewöhnlich zwey Linien eb, db in der Ebene perpendikulär auf einander, und setzt auf jeder das rechtwinklichte Dreyeck abc, abd an, um die lothrechte Lage der Linie ab zu bestimmen.

9) Satz. I. Alle Ebenen, wie habe, gabf Fig. 4., welche man durch eine auf die Ebene ebcd lothrechte Linie ab legt, stehen lothrecht auf der ebcd.

II. Wenn man auf den Durchschnitt eb zweyer sich senkrecht schneidenden Ebenen bahe, bcde ein Perpendikel ab in der einen Ebene setzt, so steht dasselbe lothrecht auf der andern Ebene.

III. Der Durchschnitt ab zweyer oder mehrerer auf einer Ebene ebcd senkrechten Ebenen steht lothrecht auf der ersten Ebene.

Beweis von I. Man ziehe auf den Durchschnitt eb einer durch das Loth ab gelegten Ebene mit der Ebene bcde, in dieser Ebene das Perpendikel bc, so sind die Winkel abc, abe Rechte, weil ab lothrecht auf der ganzen Ebene bcde, aber ∠abc ist der Neigungswinkel (4. Erklär.) der Ebene habe mit der Ebene

bcde; folglich stehen beyde Ebenen senkrecht auf einander. Eben so wird der Beweis für jede andere durch das Loth ab gelegte Ebene geführet.

II. Man ziehe auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt be auch in der andern Ebene von b aus das Perpendikel bc, so ist abc der Neigungswinkel beyder Ebenen ein Rechter vermöge der Voraussetzung. Daher ab senkrecht auf bc und be in der Ebene bcde, folglich auf die ganze Ebene senkrecht.

III. Man setze in der Ebene bcde, bc senkrecht auf den Durchschnitt eb, und be senkrecht auf den Durchschnitt bf der andern Ebene, so ist vermöge II. eb lothrecht auf der Ebene bagf, daher eba ein Rechter; eben so ist bc lothrecht auf der Ebene habe, daher abc ein Rechter, folglich ab sowohl lothrecht auf be, als bc, also lothrecht auf der ganzen Ebene bcde.

Aus I. folgt, daß die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen auf beyden Ebenen zugleich senkrecht steht. Denn abc Fig. 3. sey der Neigungswinkel der Ebene abd, gegen AB, so ist dba = dbc = R, folglich db lothrecht auf abc, daher die Ebene abd sowohl, als AB lothrecht auf abc, weil sie beyde durch das Loth bd gehen. Man fälle ac in der Ebene abc perpendikulär auf bc, so ist ac lothrecht auf AB, denn bc ist der Durchschnitt der sich senkrecht schneidenden Ebenen AB, abc. Da ∠abc zugleich die Neigung der Linie ab, gegen die Ebene AB ausdrückt, so erhellet, daß man die Neigung einer Linie gegen eine Ebene (Erklär. 7.) auch so bestimmen könne: man fälle von einem willkührlichen Punct a der Linie auf die Ebene ein Loth ac, und ziehe bc, so ist abc die Neigung der Linie gegen die Ebene.

10) Erklärung. Eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie noch so weit verlängert diese Ebene nicht trifft. Sie trifft aber die Ebene nicht, wenn sie mit irgend einer Linie in derselben parallel ist.

11) Satz. Eine Linie ab (Fig. 5.) sey parallel mit der Ebene AB, man lege durch jene die Ebenen abdc, abfe, so sind die Durchschnitte dieser Ebenen cd, ef mit AB der ab und unter sich parallel. II. Der Durchschnitt zweyer Ebenen abdc, abfe durch die Parallelen cd, ef ist diesen und der Ebene AB parallel. III. Wenn zwey gerade Linien cd, ef einer dritten ab parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Beweis von I. Weil ab mit der Ebene AB parallel, so kann sie weder mit cd noch ef, welche beyde in dieser Ebene liegen, zusammen stoßen, ab ist aber mit ef in der Ebene abef mit cd in der Ebene abcd daher mit diesen beyden Linien parallel, und ef ist mit der Ebene abdc parallel (10. Erklär.) und kann mit cd, welches in der Ebene abdc liegt, nicht zusammen stoßen, ef, cd sind zugleich in der Ebene AB, folglich parallel. II. Wäre der Durchschnitt ab der Ebenen abdc, abfe nicht parallel mit AB, so müßte er diese Ebene irgendwo schneiden, weil nun dieser Durchschnittspunct in der Ebene abfe und abdc liegen müßte, so müßte er vermöge der ersten Bedingung in dem Durchschnitte ef der Ebene abfe mit AB, vermöge der andern Bedingung in dem Durchschnitte dc der Ebene abdc mit AB liegen. Da dieser Punct also in ef und cd zugleich liegen müßte, so müßte er in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt liegen. Nun sind aber ef; cd parallel und haben keinen gemeinschaftlichen Durchschnitt; folglich kann auch kein Durchschnitt von ab mit der Ebene AB statt finden, ab ist daher mit der Ebene AB und mit den Linien ef, cd parallel, denn sie trifft mit keiner der Linien zusammen, und ist

mit jeder derselben in einer Ebene. III. Man lege durch ab und eine der Parallelen cd eine Ebene abdc, so ist ef dieser Ebene parallel, und kann mit ihr nicht zusammenstoßen, also auch nicht mit cd, folglich ist sie mit cd parallel, weil sie mit derselben in einer Ebene AB ist.

12) Satz. Zwey oder mehr Linien, welche auf einer Ebene lothrecht stehen, sind unter sich parallel. Umgekehrt, wenn man einem Loth auf einer Ebene eine Parallele zieht, so steht diese ebenfalls lothrecht auf der Ebene. Es seyen gf, ab, he Fig. 4. Lothe auf die Ebene bcde. Man verbinde je zwey in der Ebene bcde durch die Linien bf, be, und richte durch ab, bf, ab, be die auf bcde lothrechten Ebenen abfg, abeh auf, so befinden sich die Lothe gf, he in diesen Ebenen; denn wäre zum Beyspiel gf nicht in der Ebene durch ab, bf so lege man durch bf, gf eine andere Ebene gfb. Diese muß ebenfalls auf bcde senkrecht seyn. Es stünden also über bf auf derselben Ebene bcde zwey verschiedene Ebenen senkrecht, welches unmöglich ist. Es sind daher gf, ab; ab, eh in den Ebenen abfg, abeh, und ab mit gf, eh mit ab parallel, weil sie auf die Linien bf, eb gemeinschaftlich perpendikulär sind. — Alle Lothe auf einer Ebene sind unter sich parallel.

Umgekehret, wenn man gf dem Loth ab parallel ist, so ist gf auf der Ebene bcde lothrecht. Denn man verbinde beyde Linien in der Ebene bcde durch bf, so ist die Ebene abfg senkrecht auf bcde und bf der Durchschnitt beyder Ebenen, gf senkrecht auf diesen Durchschnitt, und daher senkrecht auf die Ebene bcde (9).

13) Satz. Wenn zwey Ebenen cab, dab Fig. 1. einander schneiden, so kann eine Linie dc nicht auf beyde Ebenen zugleich lothrecht seyn. Denn man

fälle von einem Punct c der Ebene a c b auf die andere d a b das Loth c d, durch dieses und einen willkührlichen Punct a des Durchschnitts beyder Ebenen, lege man die Ebene cda, so ist cda ein bey d rechtwinklichtes Dreyeck, folglich $<$ d c a spitz, und d c ist kein Loth auf c a b.

14) Satz. Wenn eine Linie auf zwey Ebenen zugleich lothrecht steht, so sind beyde Ebenen parallel. Denn wären sie es nicht, so müßte ein Dreyeck wie d c a Fig. 1. statt finden, in welchem bey d und c rechte Winkel wären, welches unmöglich ist. Alle Lothe zwischen zwey parallelen Ebenen sind gleich; denn man lege durch je zwey derselben eine Ebene, so steht diese Ebene auf beyden parallelen Ebenen zugleich senkrecht, und ihre Durchschnitte mit denselben sind Parallellinien, zwischen welchen die Lothe enthalten sind. Daher sind die Lothe gleich.

15) Satz. Wenn zwey Paar Linien a c, b d; a e, b f Fig. 5. jedes Paar in einer besondern Ebene parallel sind, so sind die Ebenen c a e, d b f ebenfalls parallel. Denn es ist die Ebene c a e sowohl mit b d als mit b f parallel. b d; b f bestimmen aber die Lage der ganzen Ebene d b f, welche daher mit c a e parallel ist. Oder, wenn sich beyde Ebenen d b f, c a e schneiden sollten, so müßte der Durchschnitt sowohl mit a c, als a e (11.) parallel seyn, welches unmöglich ist.

16) Satz. Wenn die beyden Schenkel eines Winkels c a e den beyden Schenkeln eines andern Winkels d b f Fig. 5. parallel sind, so sind die Winkel gleich. Denn man lege durch die parallelen Schenkel a c, b d; a e, b f die Ebenen c a b d, a b f e, und mache a c $=$ b d; a e $=$ b f, so sind a b d c, a b f e Parallelogramme, daher c d gleich und parallel der a b und e f, man verbinde c e, d f, so ist c d f e ebenfalls ein Parallelogramm, und c e $=$ d f. In den Dreyecken c a e, d b f sind die drey Seiten, und die den gleichen

Seiten gegen über stehenden Winkel gleich; folglich $\angle aae = dbf$.

II.

Prismatische Körper.

17) Erklärung. Unter einem Prisma versteht man einen Körper, welcher von zwey gleichen und ähnlichen parallelen Figuren als Grundflächen, und soviel Parallelogrammen, als die Grundflächen Seiten haben, als Seitenflächen eingeschlossen ist.

18) Anmerkung. Die Möglichkeit prismatischer Körper erhellet aus den vorhergehenden Sätzen von der Lage der geraden Linien und Ebenen gegeneinander. Fig. 5. stellt ein dreyeckigtes Prisma vor. eac, fbd, gleiche und parallele Dreyecke, sind die Grundflächen, abdc, abfe, cdfe, drey Parallelogrammen, die Seitenflächen desselben. Die Durchschnittslinien der Seitenflächen ef, ab, cd, sind als gegenüber stehende Seiten von Parallelogrammen alle einander gleich. Sie heißen die Seitenlinien des Prisma; nach ihrer Anzahl oder der Zahl der Seitenflächen, wird das Prisma genannt.

19) Aufgabe. Ueber jeder gegebenen Grundfläche ABCDE, mit jeder gegebenen Seitenlinie AF Fig. 6. ein Prisma zu beschreiben. Man setze die gegebene Seitenlinie unter einer beliebigen Neigung an einen Winkelpunct der Grundfläche an, und ziehe mit derselben durch die übrigen Winkelpuncte der Grundfläche gleiche Parallellinien, BG, CH, DI, EK, verbinde die Puncte GH, I, K, F durch gerade Linien, so ist das Verlangte geschehen. Denn vermöge der Construction sind die Figuren ABGF, BCGH, CDIH, DEKI, EAFK lauter Parallelogramme und die Figur FGHIK der Grundfläche parallel und

gleich; weil alle Seiten als gegenüberstehende Seiten von Parallelogrammen gleich, und die von gleichen und parallelen Seiten eingeschlossene Winkel vermöge (16) gleich sind.

20) **Erklärung.** Wenn die Seitenlinien auf den Grundflächen senkrecht stehen, so heißt das Prisma ein senkrechtes Prisma. Ein schiefes Prisma ist, dessen Seitenlinien gegen die Grundflächen geneigt sind. Sind die Grundflächen Parallelogramme, Fig. 7. so heißt der Körper ein **Parallelopipedum**. Es ist von sechs Parallelogrammen als Seiten- und Grundflächen begränzt. Wenn die Seitenlinien auf der Grundfläche A B C D Fig. 6. senkrecht stehen, so ist das Parallelopipedum ein senkrechtes. Die Höhen der Parallelopipeden und Prismen werden durch die Lothe von einer Grundfläche zur gegenüberstehenden ausgedrückt, bey den senkrechten Parallelopipeden und Prismen sind die Seitenlinien den Höhen gleich. Ist die Grundfläche des senkrechten Parallelopipedums ein Quadrat, und die Höhe der Seite der Grundfläche gleich, so heißt der Körper Fig. 8. ein Cubus oder Würfel.

21) **Anmerkung.** Der Würfel ist von sechs gleichen Quadraten, als Grund- und Seitenflächen begränzt. Die Durchschnittslinien derselben, zwölf an der Zahl, sind alle als Seiten von gleichen Quadraten gleich, und bilden die Seitenlinien des Würfels. Je drey zusammenstoßende rechte Winkel der gleichen Quadrate machen einen körperlichen Winkel, oder ein Eck des Würfels, und alle diese Ecke (acht an der Zahl) sind ebenfalls gleich. Der Würfel ist daher ein Körper von gleichen Seiten und Winkeln, und gleichen und ähnlichen Seitenflächen. Man nennt solche Körper regulaire Körper. Man bedienet sich in der Stereometrie des Würfels zur Ausmessung der Körper, eben so

wie in der Planimetrie des Quadrates zur Vergleichung der ebenen Figuren.

Ein Würfel, dessen Seite ein Zoll, ein Fuß, eine Ruthe, eine Meile ist, heißt ein Cubikzoll, Cubikfuß, Cubikruthe, Cubikmeile.

22) Satz. Ein Schnitt durch ein Prisma oder Parallelopipedum mit der Grundfläche parallel geführet, giebt eine Figur, welche der Grundfläche gleich und ähnlich ist. abcd Fig. 7. sey ein solcher paralleler Schnitt, so sind die mit einerley Buchstaben bezeichneten Seiten der Grundfläche und des Schnittes, als gegeneinander überstehende Seitenlinien von Parallelogrammen gleich, und die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel sind vermöge (16) ebenfalls gleich, folglich die ganzen Figuren abcd, ABCD gleich und ähnlich. Der gleichen und paralleln Schnitte kann man sich in einem Prisma oder Parallelopipedum unzählig viele denken. Giebt man ihnen gleichen Abstand voneinander, so wird dadurch der Körper in lauter gleiche kleinere Prismen oder Parallelopipeden zerfällt. Auch folgt hieraus, daß man sich die Entstehung dieser Körper aus der parallelen Fortbewegung einer ebenen Figur (der Grundfläche) an einer geraden Linie (der Seitenlinie des Prisma) erklären kann.

23) Satz. Ein Würfel enthält so viel Würfel des nächst kleineren Maaßes, als die Cubikzahl seiner Seitenlinie in nächst kleinerem Längenmaaß ausgedrückt angiebt. Der Würfel DCBGFEA, Fig. 8. sey z. B. ein Cubikfuß, dessen Seitenlinie AB 10 Zolle enthält, so enthält der Würfel $10^3 = 1000$ Cubikzolle. Denn man theile AB, AD, AE in 10 gleiche Theile (Zolle), ziehe in der Grundfläche durch alle Theilungspuncte mit AB, AD Parallelen, so wird dadurch die Grundfläche in so viel gleiche Quadrate getheilet, als die Quadratzahl der Seitenlinie AB, 10^2 anzeigt. Ueber jedem

dieser Quadrate richte man einen Würfel a auf. Die Summe aller dieser Würfel wird ein Stück des größern Würfels ausmachen, welches man erhält, wenn man mit ABCD parallel in der Höhe $A1 = \frac{1}{10}AC$ einen Schnitt führet. Legt man durch jeden Theilungspunct von AE einen solchen parallelen Schnitt, so wird der ganze Würfel in so viel gleiche Theile geschnitten, als Theile in der Höhe AC enthalten sind. Jeder dieser Abschnitte begreift so viel kleinere Würfel a in sich, als die Grundfläche ABCD Quadrate; folglich enthält der ganze Würfel so viel kleinere Würfel, als das Produkt aus der Quadratzahl der Seitenlinie in die Höhe AE, d. i. so viel als die Cubikzahl der Seitenlinie anzeigt.

Wenn das Längenmaaß Duodecimalmaaß ist, so kommen auf das Würfelmaaß $12^3 = 1728$ Theile; wenn das Längenmaaß 16theiliges Maaß ist, $16^3 = 4096$ auf das Würfelmaaß. Hieraus erhellet, wie man das kleinere Würfelmaaß ins größere, und umgekehret, dieses in jenes verwandeln könne. Das Decimalmaaß erspart die Multiplication und Division, wenn man das kleinere Würfelmaaß als Decimalbrüche des größeren ansieht, und je drey Stellen für das nächst kleinere rechnet, weil die Theilung von 1000 zu 1000 geht, z. B. 36,758247 Cub. Ruthen ist so viel als 36 Ruth. 758 Fuß, 247 Zoll.

24) Satz. Der Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums wird gefunden, wenn man die Seiten der Grundflächen und die Höhe mit einerley Maaß misset, und den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe multipliciret. Wenn man durch jeden Theilungspunct der Höhe einen mit der Grundfläche parallelen Schnitt a b c d Fig. 7. legt, so wird das Parallelopipedum in so viel gleiche Abschnitte getheilet, als das Maaß der Höhe anzeigt. Jeder dieser Abschnitte enthält so viele Würfel,

(20) als die Grundfläche Quadrate. Man erhält daher die Anzahl aller Würfel, oder den Inhalt des Parallelopipedums, wenn man die Grundfläche desselben mit der Höhe multipliciret. Es sey z. B. AB = 6 Fuß, AD = 4 Fuß, AH = 12 Fuß, so ist das Parallelopipedum = 4. 6. 12 = 288 Cubikfuß.

25) Anmerkung. Was es heiße, eine Fläche mit einer Linie multipliciren, um den Inhalt eines Körpers zu finden, wird erhellen, wenn man sich dessen erinnert, was (123 Geom.) bey der Ausrechnung von Parallelogrammen gesagt worden ist. Man misset eine Fläche durch das Produkt zweyer Linien, weil dieses Produkt, als Zahl betrachtet, das Verhältniß des zum Grunde gelegten Flächenmaaßes zur ganzen Fläche angiebt. Eben so misset man den Inhalt eines Körpers durch das Produkt dreyer Linien, oder seiner Grundfläche in die Höhe, weil dieses Produkt, als Zahl, das Verhältniß des Körpermaaßes zum ganzen Körper ausdrückt.

26) Satz. Ein senkrechtes und ein schiefes Parallelopipedum über einer Grundfläche und von gleicher Höhe haben einerley Inhalt.

Ich nehme zuerst den Fall an, daß zwey parallele Seitenflächen des senkrechten Parallelopipedum mit zweyen Seitenflächen des schiefen in einer Ebene liegen, ABCD, ABEF (Fig. 67. I. Geom.) seyen zwey solche in einer Ebene liegende Seitenflächen des senkrechten und schiefen Parallelopipedums. Man denke sich auf die Ebene des Papiers von A aus ein Loth, und mache dieses Loth der in der Figur nicht dargestellten Seitenlinie der gemeinschaftlichen Grundfläche beyder Parallelopipeden gleich, ich will diese Seitenlinie h nennen. Auf das Ende des Lothes h setze man zwey Parallelogramme den ABCD, ABEF gleich und parallel auf, so bestimmt der Raum zwischen den gleichen und parallelen Parallelogrammen ein senkrechtes und schiefes

Parallelopipedum über einer gemeinſchaftlichen Grundfläche. Man kann ſich daher die Entſtehung dieſer beyden Körper auch folgendermaßen vorſtellen. Die Seitenflächen ABCD, ABEF der beyden Körper denke man ſich als feſte Ebenen, und führe ſie an einer auf ſie lothrechten Linie h parallel mit ihrer anfänglichen Lage hinaus, ſo wird, wenn beyde um die Entfernung h fortgerückt ſind, ABCD ein ſenkrechtes, ABEF ein ſchiefes Parallelopipedum beſchrieben haben. Beyde Parallelopipeden müſſen einander gleich ſeyn, weil die Parallelogramme gleichen Inhaltes, um gleiche Entfernungen an einer auf ſie gemeinſchaftlich lothrechten Linie fortgeführet worden ſind, folglich gleiche körperliche Räume durchſtrichen haben.

Wenn II. die Seitenlinien des ſchiefen Parallelopipedums mit den Seitenlinien AD, BC des ſenkrechten nicht in einer Ebene, alſo die gegenüberſtehenden Seitenlinien beyder Parallelopipeden ebenfalls nicht in einer Ebene liegen, ſo wird dadurch nichts verändert, als daß die Seitenlinien des ſchiefen Parallelopipedums größer oder kleiner werden, und gegen die Grundfläche eine andere Neigung erhalten, als die Seiten AF des vorhin betrachteten Parallelopipedums, welches mit dem ſenkrechten zwey parallele Seitenflächen in einer Ebene hatte. Da ſich aber zwiſchen den Parallellinien DC, AB Linien AC, AF, von jeder gegebenen Größe und Neigung legen laſſen, ſo wird man immer dem ſchiefen Parallelopipedum, deſſen Seitenlinien mit dem ſenkrechten nicht in einer Ebene ſind, ein gleiches von gleichen Seiten und Neigung verzeichnen können, das zwey parallele Seitenflächen mit den Seitenflächen des ſenkrechten in einer Ebene hat. Da nun das eine ſchiefe Parallelopipedum dem ſenkrechten von gleicher Höhe und Grundfläche gleich iſt, ſo iſt es auch das andere.

27) Anmerkung. Ich habe einen solchen Beweis des vorstehenden wichtigen Lehrsatzes gewählet, der sich, wie ich glaube, einem Anfänger der Geometrie durch ausgeschnittene Figuren von Papp oder Kartenblättern am leichtesten versinnlichen läßt. Hat der Anfänger diesen Beweis gefasset, so kann man ihm leicht den strenger geometrischen, ohne Dunkelheit zu befürchten, beybringen, wenn man nur bemerkt, daß die Dreyecke ADF, BCE, CdF, AdB dreyeckigte Prismen beschreiben, indeß die Parallelogramme ABCD, ABEF Parallelopipeden beschreiben.

29) Satz. Jedes Prisma läßt sich in ein gleich großes Parallelopipedum verwandeln, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Denn man verwandle die Grundfläche ABCDE Fig. 6. in ein gleich großes Parallelogramm ABCD Fig. 7. und gebe den Seitenlinien AH, DG, BE, CF des Parallelopipedums gleiche Größe und Neigung mit den Seitenlinien des Prisma, so ist jenes diesen gleich. Beyde Körper entstehen, wenn sich eine ihrer Grundflächen längst einer Seitenlinie parallel fort bewegt; da nun die Grundflächen gleich groß sind und gleiche Neigung gegen die Seitenlinien haben, so kann man sich die Grundflächen des Prisma und Parallelopipedums in einer Ebene, und eine Seitenlinie AH, AF beyder Körper in eine gerade Linie zusammenfallend denken. Bey der parallelen Fortbewegung der Grundfläche bleiben beyde immer in einer Ebene, indeß das Parallelogramm das Parallelopipedum, und das Fünfeck das Prisma beschreibt. Beyde sind daher gleich, weil die von ihren gleichen Grundflächen durchstrichenen Räume gleich sind.

30) Satz. Alle Prismen, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich. Denn man verwandle die Prismen in Parallelopipeden von gleichen Grundflächen, und Seitenlinien von gleicher Größe

und Neigung, so sind alle Parallelopipeden vermöge (26) gleich, also auch die ihnen gleichen Prismen, unter einander gleich.

31) Aufgabe. Jedes Prisma oder Parallelopipedum auszurechnen. Man rechne die Grundfläche aus, und multiplicire sie mit der Höhe. Beyspiel:

Den cubischen Gehalt eines Gebäudes, z. B. einer Scheuer zu berechnen, welches 50 Fuß lang, 30 Fuß breit, 20 Fuß hoch, und an beyden Enden mit Giebelwänden begränzt ist, von welchen Fig. 9. eine vorstellen mag. Die Seiten des Giebels, oder die Sparren des Dachs seyen der Breite des Gebäudes gleich. Es erhellet, daß der Dachraum in diesem Falle ein senkrechtes dreyeckigtes Prisma, und der Raum des Gebäudes unter dem Dach ein senkrechtes Parallelopipedum, beyde von einerley Höhe, der Länge des Gebäudes sind, wenn eine der Giebelwände die Grundfläche vorstellet. Beyde Räume zusammengenommen, kann man auch als ein fünfseitiges Prisma betrachten, und so den Inhalt des ganzen Gebäudes auf einmal finden, wenn man den Inhalt einer seiner Giebelwände mit seiner Länge multipliciret. Die Höhe des Dreyecks edc ist $\sqrt{de^2 - df^2} = \sqrt{30^2 - (\frac{1}{2}\cdot 30)^2} = 25,95$, also der Inhalt von edc $= \frac{30 \cdot 25,95}{2} = 389,25$ Quadratfuß, der Inhalt von abcd $= 30 \cdot 20 = 600$ Quadratfuß, folglich die Summe von beyden, oder die Giebelwand 989,25 mit 50, als der Länge des Gebäudes, multipliciret, giebt 49462,5 Cubikfuß für den ganzen Inhalt. Der Inhalt des Dachraumes allein wäre $389,25 \cdot 30 = 19402,5$ Cubikfuß. Der Inhalt des Raums unter dem Dachraum $600 \cdot 50 = 30000$ Cubikfuß.

32) Erklärung. Parallelopipeden und Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren

sind, und ihre Seitenlinien einerley Neigung und Verhältniß gegen die ähnlich liegenden Seiten der Grundfläche haben.

33) Satz. Aehnliche Parallelopipeden und Prismen verhalten sich wie die Cubikzahlen ihrer ähnlich liegenden Seiten. Denn man nenne die Grundflächen ABCD, abcd Fig. 7. zweyer ähnlichen Körper B, b, die Höhen AH, ah; H, h, so verhält sich Parallelopipedum AF : Parallelopipedum af = B . H : b . h, aber

$$\begin{array}{rcl} B & : & b = AB^2 : ab^2 \text{ und} \\ H & : & h = AB : ab \end{array}$$

$$B.H : b.h = AB^3 : ab^3 \text{ zusammengesetzt}$$
$$AB^3 : ab^3 = H^3 : h^3$$

oder ähnliche Körper verhalten sich wie die Cubikzahlen ihrer Höhen, oder ähnlich liegender Seitenlinien. Würfel sind ähnliche Parallelopipeden, und verhalten sich daher wie die Cubikzahlen ihrer Seitenlinien (23). Man findet daher aus dem gegebenen Verhältniß des Längenmaaßes das Verhältniß des Würfelmaaßes, wenn man jenes cubiret.

Beyspiel: Wie viel pariser Cubikzolle machen 2040 darmstädter, beydes Duodecimalmaaß? Der darmstädter Fuß : pariser = 1276 : 1440, daher das Verhältniß der Cubikfuße $1276^3 : 1440^3$. Diese Zahlen drücken auch das Verhältniß der Cubikzolle aus, welche hier gleiche Theile ($\frac{1}{1728}$) des Cubikfußes sind. Man hat daher

$$1440^3 : 1276^3 = 2040 : \text{Gesuchten.}$$

Die Rechnung wird am bequemsten durch Logarithmen geführet, und giebt

log. Ges. = log. 2040 + 3 . log. 1276 — 3 . log. 1440, oder die Zahl 1419,4.

III.

Cylinder oder walzenförmige Körper.

34) Erklärung. Ein Cylinder oder eine Walze ist ein Körper, welcher von zwey gleichen und parallelen Kreisen BCA, bca Fig. 10. als Grundflächen, und einer durch die Umfänge der Kreise gelegten krummen Seitenfläche begränzt wird. Eine Linie Cc, welche die Mittelpuncte der beyden Kreise verbindet, heißt die Achse des Cylinders, eine Parallele Aa mit derselben in der krummen Seitenfläche die Seite des Cylinders. Wenn die Achse auf der Grundfläche senkrecht steht, so ist der Cylinder ein senkrechter.

35) Satz. Eine Ebene parallel mit der Grundfläche durch einen Cylinder gelegt, giebt einen Schnitt, welcher der Grundfläche gleich und ähnlich ist. feg sey ein solcher Schnitt. Die Achse treffe ihn in d. Ich behaupte, d ist der Mittelpunct eines Kreises, welcher der Grundfläche BAD gleich ist. Denn man ziehe in dieser willkührlich die Halbmesser CA, CD und lege durch dieselben, und die Achse Cd Ebenen CAed, CDgd, diese werden den parallelen Schnitt in den Linien de, dg schneiden; de ist parallel mit CA, CD parallel mit dg, weil sie in zwey parallelen und zugleich in den gemeinschaftlichen Ebenen CAed, CDgd sind. Ferner sind Ae, Dg als Seiten des Cylinders parallel mit der Achse Cd, folglich die Figuren CAed, CDgd Parallelogramme, und die Linien de, CA; dg, CD als gegenüberstehende Seiten in denselben gleich, aber CD = CA, folglich auch dg = de. Auf dieselbe Weise wird erwiesen, daß alle Linien von d aus an den Umfang des Schnittes gleich sind. Es ist daher der Schnitt ein der Grundfläche gleicher Kreis, und d dessen Mittelpunct. Wenn man die Achse Cc, oder Seite Bb eines Cylinders in lauter gleiche Theile theilet, und durch alle Theilungspuncte mit der Grundfläche parallele

Schnitte

Schnitte führet, so wird dadurch der Cylinder in lauter gleiche kleinere Cylinder getheilet. An einer geraden Linie Bb werde ein Kreis BCA parallel fortgeschoben, bis er in die Lage bca kommt, so hat er bey seiner Bewegung einen Cylinder beschrieben. Es kommt auf die Neigung der Linie Bb gegen die Grundfläche an, ob der auf die beschriebene Weise erzeugte Cylinder ein senkrechter oder ein schiefer wird. In dem senkrechten Cylinder verwandeln sich die Parallelogramme BCcb = CcaA in Rechtecke von der gemeinschaftlichen Seite Cc, und man kann auch sagen, der senkrechte Cylinder entstehe, wenn sich ein Rechteck um eine Seite Cc drehe. Die beyden Grundlinien des Rechtecks beschreiben die Grundflächen des senkrechten Cylinders, und die Höhe Aa die krumme Seitenfläche desselben. Bey dem schiefen Cylinder findet diese Art der Erzeugung, wegen der ungleichen Nebenwinkel bey c, und C nicht statt.

30) Satz. Jeder Cylinder ist als ein Prisma von gleicher Höhe anzusehen, dessen Grundflächen regulaire Vielecke von unzählig viel Seiten sind.

Man beschreibe in die Grundfläche eines Cylinders Fig. 11. ein Polygon ABCDEF, mit einer Seite Aa des Cylinders ziehe man durch alle Mittelpuncte des Polygons die Parallelen Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, so entsteht ein vieleckigtes Prisma innerhalb dem Cylinder, welches mit ihm gleiche Seiten und die Grundflächen in einerley Ebene hat. Das Prisma ist kleiner als der Cylinder, und kommt demselben in dem Maaße näher, in welchem seine Grundflächen dem Kreise näher kommen. Die regulairen Vielecke kommen aber einem Kreise desto näher, je größer die Anzahl ihrer Seiten ist, und fallen mit ihm zusammen, wenn dieselbe unendlich groß ist, alsdann fällt auch das Prisma mit dem Cylinder zusammen.

37) Satz. Senkrechte und schiefe Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich. Die Cylinder sind als unzählig seitige Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen anzusehen, und der Satz fließet aus (30.). Man findet daher den Inhalt eines Cylinders, wenn man seine Grundfläche als einen Kreis berechnet und dieselbe mit der Höhe multiplicirt. Ist der Cylinder ein senkrechter, so ist die Höhe seiner Seite gleich, ist es ein schiefer, dem Lothe von einer Grundfläche zu gegen überstehenden.

38) Satz. Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders ist einem Rechteck gleich, dessen Grundlinie den Kreisumfang der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist. Dieser Satz erhellet folgendermaßen. Die Seiten des senkrechten Cylinders stehen überall perpendikular auf dem krummen Umfang der Grundfläche. Man theile denselben in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile, und errichte über den dadurch bestimmten Polygon ein senkrechtes in dem Cylinder beschriebenes Prisma Fig. 11. Die Seitenflächen dieses Körpers sind lauter Rechtecke von gleichen Grundlinien und Höhen, der Höhe des senkrechten Cylinders. Man denke sich den Umfang des Polygons A B C D E F A in einer geraden Linie an einander gesetzt und richte über derselben als Grundlinie mit der Höhe A a des senkrechten Cylinders ein Rechteck auf, so ist dasselbe der Summe der Seitenflächen des senkrechten Prisma gleich. Es erhellet, daß diese Art die Seitenfläche eines senkrechten Prisma in einem Rechteck darzustellen, sich auf keine bestimmte Zahl von Seiten einschränkt. Sie bleibt daher noch richtig, wenn das Prisma selbst unzählig viel Seiten hat. Alsdann ist aber der Umfang des Polygons dem Umfange des Kreises gleich, und die Seitenfläche des unzähligseitigen Prisma ist einerley mit der krummen Seitenfläche des senkrechten Cylinders, woraus der obige Satz fließet.

39) Anmerkung. Man berechnet vermöge des vorstehenden Satzes die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders, wenn man den Umfang seiner Grundfläche mit der Höhe oder Seite des Cylinders multiplicirt. Die Oberfläche eines schiefen Cylinders kann auf diese Weise nicht gefunden werden, weil die Vorstellungsart des 38sten Satzes, wegen der ungleichen Winkel, die die Seiten des schiefen Cylinders an den verschiedenen Stellen des Umfangs seiner Grundfläche machen, nicht statt findet. Ueberhaupt ist die Berechnung der krummen Oberflächen der Körper nicht leicht, und gehöret im Allgemeinen für die höhere Geometrie.

40) Satz. Cylinder, Prismen und Parallelopipeden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und wenn die Höhen gleich sind, wie ihre Grundflächen. Denn der Inhalt dieser Körper wird ausgedrückt, durch das Produkt der Grundflächen in die Höhen, und das Verhältniß dieser Produkte ist dem Verhältniß der Körper gleich. Kommen in den Produkten gleiche Factoren (Grundflächen oder Höhen) vor, so streichen sich diese gegen einander weg, und das Verhältniß bleibt nach Arithm. (99) unverändert.

Man nenne die Grundflächen zweyer solcher Körper B, b, ihre Höhen H, h, so ist das Verhältniß der Körper $= B . H : b . h$.

Dieß giebt für $B = b$

$$B . H : b . h = H : h$$

für $H = h$

$$B . H : b . h = B : b.$$

41) Satz. Aehnliche Cylinder sind solche, deren Seiten gleiche Neigung und Verhältniß zum Durchmesser der Grundflächen haben. Sie verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser, oder ihrer Seiten, oder Höhen.

Fig. 14. seyen zwey ähnliche Cylinder, die Durchmesser ihrer Grundflächen heißen d, D, ihre Seiten s, S, ihre Höhen h, H. Wegen der gleichen Neigung beyder Cylinder ist Dreyeck abc ähnlich ABC, also

$$AB : ab = BC : bc \text{ oder}$$
$$S : s = H . h$$

vermöge des vorhergehenden Paragraphs verhalten sich die Cylinder =

$$b . h : B . H$$

aber die Grundflächen als Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder $b : B = d^2 : D^2$ also die Cylinder =

$$d^2 h : D^2 H = d^2 s : D^2 S$$
$$d : D = s : S$$

wegen der Aehnlichkeit der Cylinder. Setzt man das erste Verhältniß statt des letztern in dem Verhältniß der Cylinder, so erhält man dafür $d^3 : D^3 = s^3 : S^3 = h^3 : H^3$ weil $d : D = s : S = h : H$ ist.

42) Anmerkung. Als Anwendung der vorstehenden Sätze mögen die folgenden Beyspiele dienen.

Baumstämme, deren obere und untere Durchmesser gleich oder nicht merklich verschieden sind, werden in Forstrechnungen als senkrechte Cylinder von gegebener Länge und Dicke bestimmt. Es sey die Länge eines Stammes 20 Fuß, die Dicke desselben 2,5 Fuß, wie viel beträgt sein Inhalt an Cubikfußen?

Der Inhalt des kreisförmigen Queerschnitts ist $2{,}5^2 \cdot \frac{1}{4} P = 2{,}5^2 \cdot 0{,}785 = 49$ Quadratfuß giebt mit 20 multipliciret 98 Cubikfuß für den Inhalt des Stammes. Fragte man, wie stark läßt sich dieser Stamm ins Quadrat behauen, und wie verhält sich der Inhalt des behauenen Stammes zum Inhalt des runden Stammes? so kommt es darauf an, die Seite und den In-

halt des in dem Queerschnitt des Stammes beschriebenen Quadrates zu finden. Der Inhalt des behauenen Stammes verhält sich zum Inhalte des Rundstammes wie jenes Quadrat zum Kreis, weil die beyden Körper ein Cylinder und Parallelopipedum von gleichen Höhen sind, die sich wie ihre Grundflächen verhalten. Man nenne den Halbmesser des in dem Kreis beschriebenen Quadrats (Fig. 117. Geom.) 1, also den Durchmesser 2, so ist die Seite des Quadrates als die Hypotenuse eines gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyecks $= \sqrt{2}$. Da sich nun die Seiten von ähnlichen Polygonen wie die Durchmesser der Kreise verhalten, worinn sie beschrieben sind, so findet man die Seite des Quadrates für den Durchmesser 2,5 durch die Proportion

$$2 : 2{,}5 = \sqrt{2} : \text{Ges.} = \frac{2{,}5 \cdot \sqrt{2}}{2} =$$

$1{,}25 \cdot \sqrt{2} = 1{,}76$ Fuß. Der Inhalt des Quadrates ist $\frac{2{,}5 \cdot \sqrt{2}}{2} \times \frac{2{,}5 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2{,}5^2 \cdot 2}{4}$ und verhält sich zum Inhalte des umschriebenen Kreises $= \frac{2{,}5 \cdot P}{4}$ wie $2 : P = 2 : 3{,}14 = 1 : 1{,}57$ beynahe $= 1 : 1\frac{1}{2}$. — Wie viel Klafter Holz giebt der oben berechnete cylindrische Stamm, die Klafter 6 Fuß breit und hoch und die Spalten 4 Fuß lang angenommen?

Die Klafter ist ein senkrechtes Parallelopipedum, also ihr cubischer Inhalt alles für voll gerechnet $= 6.6.4 = 144$ Cubikfuß, folglich der Stamm $\frac{28}{144}$ Klafter $= 0{,}68$ Klafter. Wie viel die Zwischenräume in einem Klafter betragen, läßt sich schwerlich allgemein angeben, weil es dabey sehr auf die Beschaffenheit des Holzes ankommt, ob es grob oder fein gespalten ist, u. dgl. m.

Die Maaße, deren man sich zum Fruchtmessen bedienet, sind gewöhnlich hohle Cylinder. An einem Darmstädter Simmer fand ich den kleinsten Durchmesser der Oeffnung 14 Zoll, den größten 14,7 Zoll Darmstädter Maaß, die Höhe 11,8. Rechnet man den hohlen Raum als einen senkrechten Cylinder vom mittlern Durchmesser 14,35 und 11,8 Zoll Höhe aus, so findet sich der Inhalt 1907 Cubiczoll. Er sollte nach dem Darmstädter Eichmaaß 2040 seyn.

Den Inhalt von irregulär gestalteten hohlen Körpern zu finden, bedienet man sich in der Ausübung statt der geometrischen Messung oft mit mehr Zuverläßigkeit des folgenden mechanischen Verfahrens. Man lasse sich ein hohles Maaß verfertigen, dessen Inhalt genau geometrisch berechnet werden kann, z. B. einen ganzen, halben, viertel oder achtel Cubikfuß, fülle das Maaß voll Wasser, Sand, Hirsen oder dgl. und wiege das das darinn Enthaltene. Mit derselben flüssigen Materie fülle man den irregulären Körper und wiege ebenfalls die darin enthaltene Menge. Aus dem Verhältniß der Gewichte ergiebt sich das Verhältniß der körperlichen Räume. Wie man den Inhalt eines jeden hohlen sowohl als massiven Körpers durch Abwägen in Wasser oder einer andern Flüssigkeit bestimmen könne, lehret die Hydrostatik. Auf die vorhin beschriebene mechanische Weise sind die Fruchtmaaße im Hessen-Darmstädtischen und den angränzenden Gegenden bestimmt und unter einander verglichen worden.

Ich setze einige der vorzüglichsten zum practischen Gebrauch hierher. In der Obergrafschaft Catzenellebogen und den angränzenden Gegenden rechnet man nach Maltern und Simmern. Das Malter hat 4 Simmern, das Simmer 4 Kumpf, der Kumpf 4 Gescheid, das Gescheid 4 Mäschen. In dem Oberfürstenthum Hessen wird meistens nach Achtel und Mesten

gerechnet. In Gießen enthält das Malter 2 Achtel, das Achtel 8 Mesten, die Meste 8 Gescheid. In Marburg rechnet man auf das Malter 4 Mött, auf die Mötte 4 Mesten, auf die Meste 4 Vierling, auf den Vierling 4 Mäschen.

		Parif. Cub. Zoll.
Das Darmstädter Simmmer	enthält	1419,4
Das Mainzer Simmer	—	1364,0
Das Braubacher Simmer	—	1364,0
Das Frankfurter Simmer	—	1458,0
Das Oppenheimer Viertel	—	1530,3
Das Umstädter Simmer	—	1528,4
Die Gießer Meste	—	817,3
Die Marburger Mötte	—	1308,
Die Wetzlarer Meste	—	843,7
Die Butzbacher Meste	—	754,2
Die Grünberger Meste	—	1120,4
Die Alsfelder Meste	—	997,0
Die Niddaer Meste	—	1003,2

Fässer werden ausgemessen durch Cylinder von gleichem Durchmesser und Höhe. Es entsteht die Frage: wenn der Inhalt eines solchen Cylinders gegeben ist, wie groß ist sein Durchmesser? Um diese Frage leicht zu beantworten, wollen wir für den unbekannten Durchmesser ein allgemeines Zeichen, den Buchstaben d (Diameter), setzen, und den Cylinder berechnen, als wenn der Durchmesser bekannt wäre. Die Grundfläche desselben ist (nach Geom. 193.) $= d^2 . \frac{1}{4} P = d^2 . 0{,}785$, dieß mit der Höhe, ebenfalls $= d$, multiplicirt, giebt den Inhalt des Cylinders $d . d^2 . 0{,}785 = d^3 . 0{,}785$. Dieser Ausdruck zeigt, daß man den Inhalt eines Cylinders von gleichem Durchmesser und Höhe findet, wenn man den Cubus seines Durchmessers mit dem 4ten Theil des Peripherieverhältnisses multiplicirt. Man findet daher den Cubus des Durchmessers, wenn man den Inhalt des Cylinders durch 0,785 dividiret, und

den Durchmesser, wenn man aus diesem Quotienten die Cubikwurzel zieht. Das Darmstädter Weinmaaß, die Ohm = 20 Viertheil = 80 Maaß enthält, 4,6652 pariser Cubikfuß, also das Viertheil 0,23326 C. Fuß. Der Durchmesser eines Cylinders von einer Ohm ist daher nach vorstehender Rechnung $= \sqrt[3]{\frac{4,6652}{0,785}}$, der Durchmesser von einem Viertheil $= \sqrt[3]{\frac{0,23326}{0,785}}$.

Die Rechnung wird am bequemsten, wie folgt, durch Logarithmen geführt,

log.	4,665	= 3.6688516 − 3
log.	0,785	= 2.8948697 − 3
	Unterschied	0.7739819
	mit 3 dividiret	0.2579939 =

log. 5811 pariser Fuß für den Durchmesser des ohmigen Cylinders

log.	0,2333	= 3.3679147 − 4
log.	0,785	= 2.8948697 − 3
	Unterschied	= 0.4730450 − 1
		= 2.4730450 − 3
	hiervon $\frac{1}{3}$	= 0.8243483 − 1 =

log. 0,6673 pariser Fuß für den Durchmesser des Cylinders von einem Viertheil. Betrachtet man ein Faß Fig. 12. als einen Cylinder über seinen kreisförmigen Böden a b, c d, das ist, läßt man die Ausbauchung a e c, b f d desselben ausser Acht, so findet man den Inhalt desselben in Ohmen und Viertheilen, wenn man den Durchmesser a b, und die Länge a c des Fasses mit den oben berechneten Durchmessern misset, und das Quadrat von a b mit a c multiplicirt. Denn es haben so viel cylindrische Maaße Fig. 12.* auf dem Boden des Fasses Raum, als die Quadratzahl von a b ausdrückt, weil

sich die Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Z. B. Es sey $ab = 3 \cdot a'b'$, $ae = 4 \cdot a'b'$, so ist der Inhalt des Fasses $= 3 \cdot 3 \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$ Ohm oder Viertheil, je nachdem $a'b'$ den Durchmesser eines Cylinders von einer Ohm oder Viertheil bedeutet. Genauer findet man den Inhalt des Fasses mit Rücksicht auf die Ausbauchung, wenn man den größten Durchmesser cf (die Spundtiefe) und den Bodendurchmesser ab misset, beyde addiret und halbiret, und das Faß als einen Cylinder über dem so gefundenen mittlern Durchmesser gh berechnet. Es sey $ef = 4$, ab, ac wie vorhin, so ist der Inhalt der Fasses genauer $\left(\frac{4+3}{2}\right)^2 \cdot 4 = 3{,}5^2 \cdot 4 = 49$. Man erspart sich die Quadrirung des Durchmessers, wenn man die berechnete Größe $a'b'$ des zum Grunde gelegten Maaßes als die Einheit ansieht, mit derselben (nach Geom. 140) einen Quadratstab zeichnet, und damit die Durchmesser des Bodens und der Spundtiefe misset. Die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen beyden Maaßen darf man nur mit der Länge des Fasses multipliciren, um den Inhalt zu finden. Einen solchen Quadratstab nennen die Kiefer einen Visierstab, das Ausmessen der Fässer, die Visierkunst. Könnte man voraussetzen, daß die Fässer an einem Orte lauter ähnliche Körper wären, so dürfte man nur den Durchmesser des Bodens ab mit $a'b'$, oder die Diagonale be mit $b'c'$ messen, und das gefundene Maaß cubiren, um den Inhalt des Fasses zu finden.

Wie man mit geometrischer Schärfe den Inhalt eines Fasses berechnen könne, wenn die Krümmung der Dauben aec eine bekannte krumme Linie ist, ist eine Aufgabe der höhern Geometrie. Man sehe unter vielen hierher gehörigen Schriften insbesondere Lamberts Beyträge zur angewandten Mathematik. I. Theil.

Hindenburgs Magazin für reine und angewandte Mathematik 1. St. 1787.

IV.

Pyramiden und Kegel.

43) Erklärung. Man nehme eine beliebige Figur ABCDEF Fig. 13. als Grundfläche, und einen Punct g ausserhalb derselben, ziehe von allen Eckpuncten der Figur nach g gerade Linien, so entsteht eine Pyramide, welche von so viel Dreyecken als Seitenflächen begränzt wird, als die Grundfläche Seitenlinien hat. Die Pyramide wird von der Zahl ihrer Seitenflächen benennt dreyeckigt, viereckigt u. s. w. vieleckigt so bald die Grundfläche mehr als 4 Seiten hat. Der Punct g heißt die Spitze der Pyramide, ein Loth von der Spitze nach der Grundfläche g H die Höhe der Pyramide.

44) Satz. Wenn man in einer Pyramide Fig. 13. und 14. mit der Grundfläche einen Schnitt a b c d parallel führet, so ist die Figur des Schnittes der Grundfläche ähnlich. Denn die Seiten des Schnittes a b. b c, c d u. s. w. sind mit den gleichnamigen Seiten der Grundfläche parallel, folglich die von gleichnamigen Seiten eingeschlossenen Winkel im Schnitte und der Grundfläche gleich B = b, C = c und so rings herum. Die gleichnamigen Seiten selbst sind proportional, denn in den Dreyecken F A B, F B C hat man

F B : f b = A B : a b
F B : f b = B C : b c daher
A B : a b = B C : b c und so rings herum, folglich der Schnitt der Grundfläche ähnlich. Sie verhalten sich daher wie die Quadrate gleichnamiger Seiten $= AB^2 : ab^2 = FB^2 : fb^2$. Das Loth

von der Spitze treffe den Schnitt Fig. 14. in e, so ist Dreyeck FEB ähnlich feb und $FB^2 : Fb^2 = FE^2 : Fe^2$, folglich die Grundfläche zum Schnitt $= FE^2 = fe^2$ wie die Quadrate der Höhen.

45). Satz. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen Fig. 13. und 14. sind gleich. Man führe in beyden Pyramiden in gleichen Höhen oder Entfernungen von der Grundfläche die mit der Grundfläche paralleten Schnitte abcdef, abcd, so sind diese Schnitte einander gleich, weil sie vermöge 44. ein gleiches Verhältniß zu den gleichen Grundflächen haben. Die zwischen den Grundflächen und den Schnitten enthaltenen Stücke heißen abgekürzte Pyramiden. Je näher die Schnitte bey der Grundfläche liegen, desto näher kommen sie den Grundflächen an Größe, und sind endlich mit denselben für gleich zu halten, wenn die Höhe der abgekürzten Pyramiden unendlich klein wird. Alsdann verwandeln sich die abgekürzten Pyramiden in Prismen von gleicher Höhe. Man denke sich die Höhen der ganzen Pyramiden GH, FE in unzählig viele kleine gleiche Theile getheilet, und durch jeden Theilungspunct derselben einen Schnitt mit der Grundfläche beyder Pyramiden parallel geführet, so werden dadurch beyde Pyramiden in unzählig viele abgekürzte Pyramiden, wovon je zwey zusammen gehörige gleiche Höhen und Grundflächen haben, zerlegt. Jedes Paar zusammengehöriger abgekürzter Pyramiden läßt sich als ein Paar Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen betrachten, welche folglich einander gleich sind. Das ist, man kann die ganzen Pyramiden als eine unzählige Menge kleiner Prismen von gleichen Höhen, und immer kleinern und kleinern Grundflächen ansehen. Jedes Paar zusammengehöriger Prismen sowohl als ihre Anzahl in beyden Pyramiden sind gleich, folglich sind auch ihre Summen, das ist, die ganzen Pyramiden gleich.

46) Satz. Jede dreyeckigte Pyramide ist der dritte Theil von einem dreyeckigten Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Man führe durch das dreyeckigte Prisma Fig. 15. von d aus nach der gegenüberstehenden Seite ab den Schnitt abd, so wird dadurch die dreyeckigte Pyramide abcd abgeschnitten, und die viereckigte abfed bleibt zurück, welche zur Grundfläche die Seitenfläche des Prisma abfe, und zur Spitze den Punct d hat. Diese viereckigte Pyramide kann durch den Schnitt afd nach der Diagonale ef abermals in zwey dreyeckigte Pyramiden zerfällt werden, welche gleich sind, weil sie gleiche Grundflächen abf, afe und eine gemeinschaftliche Spitze in d haben. Von einer derselben afde kann man auch fed als die Grundfläche, und a als die Spitze betrachten, woraus erhellet, daß sie der zuerst abgeschnittenen abcd gleich ist, weil sie mit ihr gleiche Grundfläche abc, edf und Höhe (die Höhe des Prisma) hat. Folglich sind die drey Pyramiden gleich, und jede ist der dritte Theil des Prisma.

47) Anmerkung. Anfänger müssen sich den Beweis des vorstehenden Lehrsatzes an einem dreyeckigten Prisma von Holz, welches in drey Pyramiden zerschnitten ist, erläutern, weil es schwer hält, aus einer ebenen Figur sich eine richtige Vorstellung von den Schnitten zu machen, welche durch das Prisma geführt werden müssen, um es in drey gleiche Pyramiden zu theilen.

48) Aufgabe. Den Inhalt einer Pyramide zu berechnen. Man rechne die Grundfläche aus, und multiplicire den Inhalt derselben mit dem dritten Theil der Höhe, denn jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Wenn die Pyramide eine dreyeckigte ist, so erhellet der Beweis unmittelbar aus (46), wenn die Pyra-

mide vieleckigt ist, so läßt sie sich in so viel dreyeckigte von einer gemeinschaftlichen Spitze zerfällen, als ihre Grundfläche durch Diagonale Dreyecke giebt. Jede dieser dreyeckigten Pyramiden ist gleich ihrer Grundfläche in den dritten Theil der gemeinschaftlichen Höhe multipliciret, folglich ihre Summe, oder die vieleckigte Pyramide, gleich der Summe der Dreyecken, oder die Grundfläche der vieleckigten Pyramide multipliciret in den dritten Theil der Höhe. Man kann auch die ganze Höhe mit der Grundfläche multipliciren und das Produkt durch drey dividiren, oder die ganze Höhe mit dem dritten Theil der Grundfläche multipliciren, da dieß immer einerley Inhalt giebt.

49) Erklärung. Pyramiden, deren Grundflächen ähnliche Figuren sind, und deren Seitenlinien einerley Neigung und Verhältniß gegen die Seiten der Grundfläche haben, sind ähnliche Pyramiden. Sie verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, oder überhaupt wie die Würfel gleichnamiger Seiten. Wenn man mit der Grundfläche parallel einen Schnitt durch eine Pyramide führet, so ist das abgeschnittene Stück von der Spitze an gerechnet, der ganzen Pyramide ähnlich, vermöge (44).

50) Aufgabe. Eine abgekürzte Pyramide zu berechnen. Man berechne die ganze Pyramide und das an der Spitze abgeschnittene Stück, ziehe dieses von jener ab, so bleibt die abgekürzte Pyramide übrig. Diese Aufgabe verdienet bloß deßwegen einer besondern Erwähnung, weil in den wenigsten Fällen, wo eine abgekürzte Pyramide berechnet werden soll, das abgeschnittene Stück noch vorhanden ist, und unmittelbar gemessen oder berechnet werden kann. Es fragt sich daher, wie man aus der abgekürzten Pyramide die Dimensionen des abgeschnittenen Stücks durch Schlüsse finden könne? Hierzu dienet folgendes. AC ac Fig.

14. sey die zu berechnende abgekürzte Pyramide. Man denke sich von der Spitze das Loth FE gefällt, so ist Ee die Höhe der abgekürzten Pyramide, welche gemessen werden kann. Man denke sich ferner in einer Seitenfläche FBC mit der einen Seite FC die Parallele bH gezogen, so sind die Dreyecke BbH, FBC und Fbc ähnlich, folglich hat man folgende Proportion:

1) $BH : Bb = bc : Fb$

es sind aber $BH = BC - bc$ und Bb bekannt, folglich Fb oder die Seite des abgeschnittenen Stückes, also auch die Seite der ganzen Pyramide FB. Aus der Seite findet man die Höhe der ganzen Pyramide, denn es sey bg parallel mit FE, so ist $bg = Ee$ und

2) $Bb : bg = BF : FE.$

Aus der Höhe und Grundfläche ist der Inhalt der ganzen Pyramide gegeben. Das abgeschnittene Stück könnte auf dieselbe Weise berechnet werden, indem $Fe = FE - Ee$ ebenfalls bekannt ist, man findet es aber auch aus dem Verhältniß von $FB^3 : Fb^3$, wenn man die ganze Pyramide berechnet hat. Das eine von der andern abgezogen, giebt die abgekürzte Pyramide.

51) Anmerkung. Gewichten giebt man zuweilen die Form von abgekürzten viereckigten Pyramiden. Beyspiel: Die untern Grundflächen der abgekürzten Pyramide Fig. 14. sey ein Quadrat von 1 Zoll, die obere von einem halben Zoll, die Seiten der abgekürzten Pyramide seyen gleich, jede = 1 Zoll. Hier ist die Höhe aus der Seite schon bestimmt, denn es ist $bg = \sqrt{bB^2 - Bg^2}$ bekannt. BE, be sind die halben Diagonalen der Quadrate, daher $BE = \sqrt{\frac{1^2+1^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}}$, $be = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}^2+\frac{1}{2}^2}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2} = 1{,}414$, $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$, $BE = 0{,}707$, $be = 0{,}3535$, $BE - be = BG = 0{,}3535$ $bg = \sqrt{1} -$

$0{,}3535 = \sqrt{0{,}6465} = 0{,}804$. Aus (50) 1) $\frac{1}{2} : 1 = 1 : FB = 2$ und $Fb = 2 - 1 = 1$. Aus (50. 2)

$1 : 0{,}804 = 2 : FE = 1{,}608$. Dieß giebt den Inhalt der ganzen Pyramide $1^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}608'' = 0{,}536$ Cubikzoll den Inhalt des abgeschnittenen Stücks

$2^3 : 1^3 = 0{,}536 : \frac{1}{8} \cdot 0{,}536 = 0{,}067$

folglich die abgekürzte Pyramide $0{,}536 - 0{,}067 = 0{,}469$ Cubikzoll. Wenn die specifische Schwere der Materie gegeben ist, so läßt sich aus dem Inhalt das Gewicht, und umgekehrt aus dem Gewicht der Inhalt berechnen. Es sey z. B. die berechnete Pyramide von Metall, wovon der Cubikzoll 8 Loth wiegt, so ist das Gewicht der Pyramide $= 0{,}469 \cdot 8$ Loth $= 3{,}752$ Loth. Wollte man aus diesem Metall Gewichte gießen, welche der oben angegebenen abgekürzten Pyramide ähnlich werden sollten, und man suchte die Dimmensionen eines Pfundgewichtes, so hat man, wegen der Aehnlichkeit der Körper, die Seiten wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalt, und den Inhalt wie die Gewichte, folglich

$\sqrt[3]{3{,}752}$ Loth : $\sqrt[3]{32}$ Loth $= 1$ Zoll : Ges.

giebt die Seite des Pfundgewichtes $= 2$ Zoll, also die Seite der obern Grundfläche $= 1$ Zoll. Dieses zeigt, wie man die Dimmensionen von solchen Gewichten berechnen kann. In der Ausübung wird man die Größe und Schwere derselben lieber durch eine scharfe Waage bestimmen, indessen ist die Berechnung brauchbar, die Größe ungefähr im Voraus anzugeben.

Pyramiden von regulairen Grundflächen und gleichen Seiten kommen in der Prachtbaukunst als Verzierungen vor. In der ökonomischen Baukunst kann die Frage vorkommen, den Inhalt des Raumes eines Dachs zu finden, welches von allen Seiten spitz zuläuft, also wie eine Pyramide berechnet werden muß. Diese und

andere Beyspiele zeigen den Nutzen der vorstehenden Aufgaben in der Baukunst.

52) Erklärung. Ein Kegel entsteht, wenn man ausserhalb der Ebene eines Kreises ABE Fig. 15. einen Punct D annimmt und von demselben nach allen Puncten des Umfanges gerade Linien zieht. Diese Linien DB, DA, DE heißen Seiten des Kegels, die krumme Fläche durch sie heißt die Seitenfläche oder Oberfläche des Kegels, der Kreis ABE die Grundfläche. Eine Linie von der Spitze D nach dem Mittelpunct der Grundfläche, giebt die Achse des Kegels, wenn sie senkrecht auf der Grundlinie steht, so heiß der Kegel ein senkrechter; ein schiefer, wenn die Achse schiefe Winkel mit der Grundfläche macht, Fig. 16. Der senkrechte Kegel ist zugleich ein gleichschenklichter, weil der Durchschnitt durch die Achse desselben ADB ein gleichschenklichtes Dreyeck giebt. Ist dieses Dreyeck gleichseitig, so heißt auch der Kegel gleichseitig. Der schiefe Kegel ist stets ungleichseitig. Die Entstehung des senkrechten Kegels kann man sich durch die Herumdrehung eines rechtwinklichten Dreyecks DCA um die unbewegliche Achse DC erläutern.

53) Satz. Wenn man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche durch einen Kegel führet, so ist die Figur des Schnitts ein Kreis der Grundfläche ähnlich.

Denn man ziehe von dem Punct c, wo die Achse den Schnitt trifft, nach willkührlichen Puncten im Umfang des Schnittes e, a die Linien ce, ca so läßt sich erweisen, daß diese Linien einander gleich sind, folglich c der Mittelpunct des Schnittes ist. Man lege durch die Achse und die angenommenen Puncte e, a die Ebenen Dce, Dca und verlängere sie, bis sie die Grundfläche in CE, CA schneiden, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke DCE, Dce, DCA, Dca

DC

$$DC : Dc = CE : Ce$$
$$DC : Dc = CA : Ca,$$

also $CE : Ce = CA : Ca$ oder $CE : CA = Ce : Ca$, aber $Ce = Ca$; folglich auch $Ce = Ca$.

Ein mit der Grundfläche paralleler Schnitt schneidet von dem Kegel einen ähnlichen kleinern Kegel ab, und das zurückgebliebene heißt abgekürzter Kegel.

54) Satz. Ein Kegel und eine Pyramide, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, sind einander gleich.

Der Kegel ist anzusehen als eine unzählig vielseitige Pyramide von regulärer Grundfläche, daher fließet der Satz aus (45).

Man findet folglich den Inhalt eines Kegels, wenn man seine Grundfläche mit dem dritten Theil seiner Höhe (bey dem senkrechten Kegel mit dem dritten Theil der Achse) multiplicirt; oder der Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

55) Aufgabe. Einen abgekürzten Kegel zu berechnen. Man berechne den ganzen und den abgeschnittenen Kegel, der Unterschied von beyden giebt den abgekürzten Kegel. Die Höhe cD des abgeschnittenen Kegels Fig. 15. findet man aus folgender Proportion:

$$Bf : fb = bc : Dc,$$

worinn die drey ersten Glieder bekannt sind.

56) Anmerkung. Abgekürzte senkrechte Kegel auszurechnen, kommt vorzüglich in Forstrechnungen vor, wenn der cubische Gehalt von Baumstämmen, welche sich merklich verjüngen, angegeben werden soll.

Beyspiel. Es sey die Länge eines Stammes 20 Fuß, der untere Durchmesser 4, der obere 2 Fuß, was ist der Inhalt?

Hier ist $Bf = 2 - 1 = 1$ Fuß $fb = 20$, $bc = 1$ Fuß

$1 : 20 = 1 : Ges. = 20$, oder $Dc = cC$, also $DC = 2\,cC = 40$, der ganze Kegel $= 4^2 . \frac{1}{4} P . \frac{1}{3} . 40 = 16 . 0{,}785 . \frac{1}{3} . 40 = 167{,}5$ Cubikfuß.

Der abgeschnittene Kegel verhält sich zum ganzen $= Dc^3 : DC^3 = 1^3 : 2^3 = 1 : 8$, oder er ist der achte Theil des Ganzen; folglich der abgekürzte $= \frac{7}{8}$ des Ganzen 146,5. Cubikfuß. Den Stamm als einen Cylinder von gleicher Höhe und einer Grundfläche, deren Durchmesser das arithmetische Mittel zwischen dem obern und untern Durchmesser wäre, berechnet, gäbe für den Inhalt $3^2 . \frac{1}{4} P\,20 = 9 . 0{,}785 . 20 = 141{,}3$ etwas zu klein. Der Unterschied zwischen der richtigen, und der abgekürzten Rechnung wird aber desto beträchtlicher, je größer der Unterschied des obern und untern Durchmessers bey gleicher Länge des Stammes ist.

Einsatzgewichte sind hohle abgekürzte Kegel, wovon einer in dem andern steckt. Ihren Inhalt zu finden, müßte man den hohlen und den massiven abgekürzten Kegel berechnen, und einen von dem andern wegnehmen.

57) Satz. Die Seitenfläche eines senkrechten Kegels ist dem Ausschnitte eines Kreises gleich, dessen Halbmesser der Seite des Kegels, und dessen Bogen dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich ist.

Der senkrechte Kegel ist anzusehen, als eine gleichseitige unzählig vieleckigte Pyramide von regulärer Grundfläche. Die Seitenflächen dieser Pyramide sind lauter gleichschenklichte Dreyecke, deren Höhen der Seite des Kegels gleich sind, und deren Grundlinien in dem Umfange der Grundfläche des Kegels liegen. Denkt man sich alle diese unzählig viele gleiche gleichschenklichte Dreyecke auf einer ebenen Fläche, so neben einander

gelegt, daß sie eine gemeinschaftliche Spitze erhalten, so bilden ihre Grundlinien einen Kreisbogen, also ihre Summe einen Ausschnitt, dessen Halbmesser der Seite und dessen Umfang dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich ist.

Man berechnet daher die Oberfläche eines senkrechten Kegels, wenn man den Umfang seiner Grundfläche mit der halben Seitenlinie des Kegels multipliciret.

58) Anmerkung. Wenn ein senkrechter Kegel auf einer ebenen Fläche sich um seine Spitze wälzt, so beschreibt er einen Kreisbogen, in dem sich seine Seitenfläche auf der Ebene gleichsam abwickelt. Solche Figuren, welche durch Umwälzung einer krummen Linie, Fläche, oder eines Körpers auf einer Ebene entstehen, heißen in der höhern Geometrie Evoluten. Ihre allgemeine Betrachtung ist nicht leicht. Aus dem vorstehenden erhellet, daß die Evolute der senkrechten Kegelfläche ein Kreis ist.

Wie groß ist der Winkel des Ausschnitts, welcher der Oberfläche des gleichseitigen Kegels gleich ist? Hier ist AB (Fig. 15.) = BD. Man setze beyde = 1, so ist der Umfang der Grundfläche des Kegels = P, oder das Peripherieverhältniß selbst, der Umfang des Kreises zu dem DB = 1 als Halbmesser gehöret = 2P, weil 1 : P = 2 : Ges. = 2 P, also seine Hälfte = P gleich dem Umfange der Grundfläche, das heißt der Ausschnitt, welcher der Oberfläche des gleichseitigen Kegels gleich ist, ist ein Halbkreis.

V.

Von der Kugel.

59) Erklärung. Eine Kugel entsteht, wenn sich ein Halbkreis ABD Fig. 17. um seinen Durchmesser

AD drehet, bis er wieder in seine anfängliche Lage gekommen ist. Der Umfang ABD beschreibt die Oberfläche der Kugel, welche überall gleich weit von dem Mittelpunkt C, welcher zugleich Mittelpunct der Kugel ist, absteht. Daher sind alle Halb- und Durchmesser der Kugel einander gleich. Der Halbkreis ABD heißt auch der erzeugende Halbkreis. Man fälle auf seinen Durchmesser die Perpendikel FG, CB, HI, so beschreiben alle diese Linien bey der Umdrehung des erzeugenden Kreises Parallelkreise, wovon der, welcher durch den Mittelpunct C geht, der größte ist. Die Linie AD heißt Achse für die Parallelkreise, die Puncte A und D sind die Pole derselben. Sie stehen überall von dem Umfang der Parallelkreise gleichweit ab.

60) Anmerkung. In der Geometrie ist es verstattet, jeden Durchmesser der Kugel als eine Achse zu betrachten, weil man jeden Halbkreis durch der Kugel Mittelpunct als den erzeugenden Kreis ansehen kann. In der Astronomie und mathematischen Geographie heißt der Durchmesser, um den sich ein Weltkörper dreht, Achse, seine Enden Pole, der Parallelkreis EGB, welcher durch den Mittelpunct geht und gleich weit von beyden Polen absteht, Aequator. Kreise, welche sich in der Achse schneiden, wie AKD, ABDE, heißen Meridiane, der Bogen KB des Aequators zwischen ihnen, welcher das Maaß des Winkels A ist, heißt der Unterschied der Meridiane. Ueberhaupt nennt man Dreyecke, wie AKB, welche durch drey in dem Mittelpunct sich schneidende Bögen auf der Oberfläche einer Kugel gebildet werden, sphärische Dreyecke. Mit ihnen beschäftiget sich die sphärische Trigonometrie, welche der Astronomie vorhergehen muß, weil alle Erscheinungen am Himmel uns so vorkommen, als ereigneten sie sich an der Oberfläche einer Kugel, in deren Mittelpunct sich unser Auge befindet.

61) Satz. Jeder Schnitt einer Ebene mit einer Kugel giebt einen Kreis. a b Fig. 18. sey die schneidende Ebene, a e b f Puncte im Umfang des Schnittes. Man fälle von dem Mittelpunct der Kugel ein Loth c d auf die Ebene des Schnittes, und ziehe von c und d nach einem Punct im Umfang des Schnittes b die Linien a b, d b, so ist c d b ein rechtwinklichtes Dreyeck, man lasse dasselbe sich um c d drehen, so bleibt d b immer in der Ebene des Schnittes, und der Punct b zugleich im Schnitt und in der Oberfläche der Kugel. Es beschreibt aber d b bey der Umdrehung des Dreyecks c d b einen Kreis, folglich ist die Figur des Schnitts ein Kreis. Dieser wird desto größer, je größer d b ist, das ist, je näher a b zum Mittelpunct c rückt; in c selbst ist der Kreis am größten. Man nennt daher auch Kreise, welche durch der Kugel Mittelpunct gehen, größte Kreise. Sie sind alle gleich, weil sie zu ihrem Halbmesser den Halbmesser der Kugel haben. In den Polen g und h verwandeln sich die Kreise in Puncte.

62) Satz. Größte Kreise, welche sich schneiden, halbiren sich wechselseitig, denn sie schneiden sich in einem Durchmesser, welcher zugleich ein Durchmesser der Kugel ist.

63) Satz. Kleinere Kreise, welche gleichen Abstand vom Mittelpunct der Kugel haben, sind gleich. Denn die Größe eines solchen Kreises wird durch seinen Halbmesser $db = \sqrt{cb^2 - cd^2}$ Fig. 18. bestimmt, und ist folglich einerley, wenn c d unveränderlich bleibt. Kleinere Kreise, oder ein kleinerer und ein größter Kreis können sich nicht wechselseitig halbiren. Denn, wenn zwey kleinere Kreise sich wechselseitig halbiren sollten, so müßte eine gerade Linie vom Mittelpunct der Kugel nach dem gemeinschaftlichen Mittelpunct der Kreise auf beyden zugleich senkrecht stehen, welches nicht seyn kann. Wenn ein kleinerer Kreis einen größten halbirte, so müßte es

in seinem Mittelpunct, dem Mittelpuncte der Kugel geschehen, durch welchen der kleinere Kreis nicht geht.

64) Satz. Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß, als die Fläche eines ihrer größten Kreise. ABD Fig. 19. sey ein erzeugender Halbkreis, so wird durch die Umdrehung desselben um die Achse AD die Kugel beschrieben, indeß durch die Halbmesser Fa, Gc zwey Parallelkreise beschrieben werden, welche ein kleines Stück der Kugelfläche zwischen sich fassen, das durch die Umdrehung von ac erzeugt wird. Man nennt einen solchen Streifen der Kugeloberfläche eine Zone. Ich will zuerst erweisen, daß alle solche Zonen, welche einerley Höhe FG haben, einander gleich, und so groß sind als eine Cylinderfläche, welche durch die Umdrehung von ed beschrieben worden ist. Man ziehe an ac eine Tangente, und verlängere sie, bis sie die Achse DA in E schneidet, so entsteht durch die Umdrehung von Egc ein Kegel, welcher ein kleines Stückchen ac seiner Oberfläche mit der Kugeloberfläche gemein hat. Ich nehme vorerst an Fa, Gc liegen unendlich nahe beysammen, so ist die unendlich kleine Kugelzone der Oberfläche eines unendlich kleinen abgekürzten Kegelstückchens gleich, und dieses selbst ist als ein kleines Cylinderstückchen anzusehen, weil die Kreise von den Halbmessern Fa, Gc unendlich wenig unterschieden sind (Anfänger dürfen sich an der Figur nicht stoßen, unendlich kleine Stückchen lassen sich nicht zeichnen). Man findet daher die Oberfläche dieser unendlich kleinen Kugelzone als eine Cylinderfläche berechnet, wenn man die Seite ac mit dem Umfang des Kreises von Fa oder Gc multipliciret (39). Sie ist =

1) 2Fa . 3,14 . ac. Man ziehe ab perpendikular auf gc, so ist Dreyeck bac ähnlich FaC, weil bey F und b rechte Winkel und FaC = bac, indem jeder derselben mit Cab einen rechten Winkel ausmacht.

Hieraus fließt folgende Proportion: Fa:Ca=ab:ac. 2) also Fa.ac=Ca.ab. Schreibt man den letzten Werth statt des ersten in den Ausdruck 1) für die kleine Kugelzone, so bekommt man 2Ca.3,14.ab. Dieser Ausdruck ist der Cylinderfläche durch die Umdrehung von ed gleich, weil Ca=CB=gd, also 2Ca.3,14=2Gd.3,14 der Umfang des Kreises mit Gd, ferner ab=ed die Höhe des Cylinders ist. Hieraus erhellet zugleich, daß alle kleine Kugelzonen von einerley Höhe ab einander gleich sind, weil sie so groß sind als Cylinderflächen von gleicher Höhe und dem Halbmesser der Kugel. Stellt man sich nun den Halbmesser AC in lauter gleiche Theile, wie FG getheilet vor, so gehören zu diesen Theilen lauter gleiche Kugelzonen, welche zusammen die Halbkugel ausmachen, und wovon jede Zone einer Cylinderfläche von ed gleich ist. Alle die kleinen Cylinderflächen machen zusammen die Fläche des großen Cylinders aus, welcher durch die Umdrehung von ACBH beschrieben wird. Das ist die Oberfläche der Halbkugel, ist der Seitenfläche eines senkrechten Cylinders gleich, welcher mit ihr einerley Durchmesser, und zur Höhe, die Höhe des Halbmessers hat; folglich die ganze Kugelfläche einer Cylinderfläche von gleichem Durchmesser und Höhe mit dem Durchmesser der Kugel gleich. Man nenne den Durchmesser der Kugel = d, so ist die Cylinderfläche von gleichem Durchmesser und Höhe = d.3,14.d = d^2.3,14 viermal so groß, als die Fläche eines größten Kreises der Kugel = $d^2 . \frac{1}{4} 3,14$, welches zu erweisen war.

65) Anmerkung. Aus dem Erweise des vorstehenden Satzes ist klar, daß man die Oberfläche eines jeden Kugelsegmentes, welches durch die Umdrehung eines beliebigen Bogens Aa beschrieben wird, finden könne, wenn man die Cylinderfläche von He berechnet, welche mit dem Kugelabschnitt einerley Höhe, und zum

Durchmesser den Durchmesser der Kugel hat. Die Oberfläche verschiedener Abschnitte verhalten sich daher wie die Höhen der Abschnitte. Die halbe Kugelfläche ist einem Kreis vom Halbmesser AB gleich, denn es ist $AB = \sqrt{2}$, wenn $AC = CB = 1$ ist, folglich der Kreis mit AB noch einmal so groß als der Kreis mit CB, der größte Kreis der Kugel, weil sich die Kreise wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten. Die Fläche eines Kugelabschnittes AcF ist einem Kreis gleich, dessen Halbmesser die Sehne AF ist. Denn es verhält sich die Fläche des Kugelabschnittes zur Halbkugelfläche $= AG : AC$, eben so verhalten sich die Kreise von den Halbmessern AF und AB. Denn vermöge (Geom. 99.) ist

$AG : AF = AF : AD$

oder $AF^2 = AG \cdot AD$

$AC : AB = AB : AD$

oder $AB^2 = AC \cdot AD$

daher $AF^2 : AB^2 = AG \cdot AD : AC \cdot AD = AG : AC$.

Kreis mit AF : Kreis mit $AB = AF^2 : AB^2 = AG : AC$.

Da nun der Kreis mit AB der Halbkugelfläche erwiesener Maaßen gleich ist, so ist auch der Kreis mit Aa der Fläche des Kugelsegmentes gleich. Diese Sätze üben Blechschmidte und andere Handwerker oft aus, wenn sie ebene Flächen zu gleich großen Kugelflächen krümmen wollen.

Beyspiel zur Berechnung einer Kugelfläche:

Wenn der Durchmesser der Erde 1720 Meilen ist, wie viel Quadratmeilen hält ihre Oberfläche? Antw. $1720^2 . \pi = 1720^2 . 3{,}141559 \ldots = 1026671{,}6$ beynahe.

66) Satz. Die Oberflächen von Kugeln, welche verschiedene Durchmesser haben, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, weil sich die größten Kreise so verhalten, von welchen die Kugeloberflächen die Viersachen sind.

Beyspiel: Der Durchmesser der Sonne sey 111. Mal größer, als der Durchmesser der Erde, so ist die Oberfläche der Sonne 111^2 Mal = 12221 Mal größer als die Oberfläche der Erde.

67) Satz. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist dem Inhalte einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der Oberfläche der Kugel, und deren Höhe dem Halbmesser gleich ist. Man lege einen sehr kleinen Schnitt a c Fig. 19. durch die Kugeloberfläche, so ist der sehr kleine Kreis, welchen die Figur des Schnittes bildet, mit der abgeschnittnen kleinen Stelle der Kugeloberfläche für einerley zu halten. Man ziehe von dem Umfang des kleinern Kreises nach der Kugel Mittelpunct Linien, wie aC, cC, so wird dadurch ein kleiner Kegel begränzt, dessen Spitze in der Kugel Mittelpunct, und dessen Grundfläche in der Oberfläche der Kugel liegt. Stellt man sich auf der Kugeloberfläche lauter kleine Kreise = a c vor, welche sich wechselseitig berühren, so gehört zu jedem dieser Kreise ein kleiner Kegel, dessen Spitze in dem Mittelpunct und dessen Grundfläche in der Oberfläche der Kugel liegt. Zwischen je drey sich zunächst berührenden Kreisen Fig. 20. ist ein kleines sphärisches Dreyeck enthalten, welches seiner Kleinheit wegen, als eben und geradlinicht angesehen werden kann. In jedem dieser kleinen Dreyecke gehört eine Pyramide, deren Spitze in dem Mittelpunct der Kugel liegt. Die Summe aller Kreise und Dreyecke macht die Oberfläche der Kugel, so wie die Summe aller Pyramiden und Kegel von gemeinschaftlicher Höhe, dem Halbmesser der Kugel, den Inhalt der Kugel aus. Es ist daher die

ser Inhalt dem Inhalt einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Halbmesser ist.

68) Satz. Aus dem vorstehenden Satz folgt, daß man den Inhalt einer Kugel berechnet, wenn man ihre Oberfläche mit dem dritten Theil des Halbmessers, oder mit dem sechsten Theil des Durchmessers multiplicirt. Der Durchmesser heiße d, so ist nach (64) die Oberfläche $= d^2 . P$, also der Inhalt $= d^2 . P . \frac{1}{6} d = \frac{1}{6} d^3 P$, (ein Sechstheil des Cubus des Durchmessers multiplicirt mit dem Peripherieverhältniß, oder der Cubus des Durchmessers multiplicirt mit $\frac{1}{6}$ des Peripherieverhältnisses, welcher letzte Factor für alle Kugeln einerley ist). Es ist $\frac{1}{6} P = 0{,}523598775598 \ldots$ von welcher Zahl man so viel Stellen, als zur beabsichtigten Schärfe der Rechnung erforderlich ist, nehmen, und mit dem Cubus des Durchmessers multipliciren kann, um den Inhalt der Kugel zu finden.

Beyspiel: Der Inhalt der Erde in Cubikmeilen, wenn der Durchmesser $= 1720$ Meilen ist, wäre $= 1720^3 . 0{,}5236 = 2140711372{,}8$ Cubikmeilen.

69) Satz. Eine Kugel ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, welcher zum Durchmesser und zur Höhe den Durchmesser der Kugel hat, und noch einmal so groß, als ein Kegel von gleichem Durchmesser und Höhe mit dem Durchmesser der Kugel.

Der Durchmesser der Kugel heiße d, so ist ihr größter Kreis, welcher der Grundfläche des Cylinders und Kegels gleich ist $= d^2 . \frac{1}{4} P$, also

der Cylinder $= d^2 . \frac{1}{4} P . d = \frac{1}{4} d^3 P$
der Kegel $= d^2 . \frac{1}{4} P . \frac{1}{3} d = \frac{1}{12} d^3 P$
der Kugel $= \frac{1}{6} d^3 P$,

folglich verhalten sich die Körper in der genannten Ordnung $= \frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{1}{6}$

$= \frac{3}{12} : \frac{1}{12} : \frac{2}{12}$

$= 3 : 1 : 2$,

woraus der Satz erhellet.

70) **Anmerkung.** Kugeln (als ähnliche Körper) verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser, da sich die ähnlichen Cylinder, von denen sie $\frac{2}{3}$ ausmachen, so verhalten.

Die Durchmesser verhalten sich wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalt der Kugeln. Wenn der Durchmesser einer Kugel 1 ist, wie groß ist der Durchmesser der noch einmal so großen Kugel? Antw. $= \sqrt[3]{2} = 1{,}25992$.

Diese Aufgabe dienet zur Berechnung des Caliberstabes in der Artillerie. Wenn man sich 100 Kugeln in einer Reihe dächte, wovon jede noch einmal so groß als die vorhergehende wäre, wie groß ist der Durchmesser der hundertsten, wenn der Durchmesser der ersten $= 1$ ist? Antwort: $= \sqrt[3]{2^{99}}$. Die Rechnung mit Logarithmen geführet, giebt

log. 2 =	0.3010300
mit 99 multipliciret =	99.3010300
durch 3 dividiret =	33.1093433

fällt zwischen die Zahlen

1259 mit 30 Nullen

1260

über 40000 Trillionenmal größer als der Durchmesser der Sonne, wenn man den Durchmesser der ersten Kugel 1 Zoll, und den Durchmesser der Sonne = 100000 Meilen, die Meile zu 24000 Fuß, den Fuß zu 12 Zoll annimmt.

71) Anmerkung. Auſſer dem Würfel ſind noch folgende regulaire Körper nicht ſowohl ihres Nutzens, den ſie in der Ausübung bringen, als wegen der mathematiſchen Unterſuchungen, die bereits die alten griechiſchen Geometer über ſie angeſtellt haben, bemerkenswerth. Das Tetraedrum von 4, das Oktaedrum von 8, das Ikoſaedrum von 20 gleichſeitigen Dreyecken, und das Dodekaedrum von 12 regulairen Fünfecken begränzt. Daß auſſer den genannten und dem Hexaedrum oder Würfel keine regulaire Körper ſtatt finden können, erhellet kurz ſo. Ebene Winkel, welche ein körperliches Eck bilden, müſſen zuſammen kleiner als 4 R ſeyn, denn wenn ſie vier Rechten gleich ſind, ſo fallen ſie in eine Ebene. Unter den regulairen Vielecks winkeln bilden 3 Dreyeckswinkel = 3 . 60° den Winkel des Tetraeders, 4 Dreyeckswinkel = 4 . 60 den Winkel des Oktaeders, 5 den Winkel des Ikoſaeders, 6 würden = 4R ſeyn. 3 Winkel des Quadrates = 3 R bilden das Eck des Würfels. 3 Winkel des regulairen Fünfecks = 3 . 108° das Eck des Dodekaeders. Mehr Fünfeckswinkel und Winkel von vielſeitigen Polygonen können kein Eck bilden, weil ſchon 3 Sechseckswinkel = 4 R, und doch wenigſtens 3 ebene Winkel zur Bildung eines Eckes erforderlich ſind.

Die ebene Trigonometrie.

1) Erklärung. Die ebene Trigonometrie beschäftiget sich mit den Eigenschaften der ebenen geradlinichten Dreyecke, und lehret das Unbekannte aus dem Bekannten durch Rechnung finden. Die bekannten Grössen müssen das Dreyeck bestimmen, also müssen es wenigstens drey und unter ihnen eine Seite seyn.

2) Erklärung. Um die Vergleichung zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreyeckes und die davon abhängenden Verhältnisse, worauf alle trigonometrische Auflösungen beruhen, zu erleichtern, hat man gewisse Linien erdacht, welche unter dem Namen der trigonometrischen Linien bekannt sind.

Wenn man aus dem Scheitel eines Winkels a c e Fig. 1. zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen a e beschreibt, und von a aus auf den andern Schenkel das Perpendikel a b fällt, so heißt a b der Sinus des Winkels a c e, oder seines Bogens a e, c b der Cosinus derselben. d e ist die Tangente, c d die Secante des Winkels oder seines Bogens. Der Cosinus ist gleich dem Sinus der Ergänzung zu 90 Grad, weil c b = f a ist. Eben so nennt man auch die Tangente g h, und die Secante c h der Ergänzung Cotangente und Cosecante des Winkels a c e. Der Unterschied zwischen dem Cosinus und Halbmesser b e heißt der Quersinus (sinus versus).

3) Satz. Die Sinusse wachsen mit den Winkeln von 0° bis zu 90°, und nehmen hierauf ab, indem die stumpfen Winkel wachsen von 90° bis zu 180°. Dieses erhellet aus der Figur, wenn $\angle a c e = 0$ Fig. 2. so ist auch der Sinus a b = 0. Mit dem Winkel wächset der Sinus. Anfänglich beynahe gleichförmig,

weil der Sinus mit dem Bogen bey kleinen Winkeln fast zusammen fällt. Je größer der Winkel wird, desto weniger wächset der Sinus bey gleichem Wachsthum der Winkel und Bögen. Wenn der Winkel $= 90°$ ist, so ist der Sinus dem Halbmesser gleich. In dem zweyten Quadranten nehmen die Sinusse wieder eben so ab, wie sie in dem ersten Quadranten zugenommen haben, bey gleichem Wachsthum der Winkel. Daher sind die Sinusse von Winkeln, welche gleich viel über und unter $90°$ betragen, oder welche zusammen $180°$ ausmachen, einander gleich. Z. B. Sinus $ice = ik =$ Sinus $ace = ab$ Fig. 1. wenn $ace = ick$ oder

$$ace + ice = 180° \text{ weil}$$
$$ace + ick = 180°$$

Der Sinus von $180°$ selbst ist wieder $= 0$. Auf diese Weise kann man die Vergleichung zwischen Bogen, Winkel und Sinus durch alle Quadranten des Kreises fortsetzen. Es ist aber hier unnöthig, weil sich die folgenden trigonometrischen Auflösungen alle auf Winkel unter $180°$ einschränken. Der Sinus von $90°$ heißt auch Sinus totus, weil man die Sinusse aller andern Winkel, welche kleiner als der Halbmesser sind, in Theilen des Halbmessers ausdrückt, d. i. den Halbmesser, oder den Sinus $90°$ als die Einheit, das Ganze, betrachtet.

4) Satz. Die Cosinusse Fig. 2. nehmen ab, indem die Winkel wachsen, sind dem Halbmesser gleich, wenn der Winkel $0°$ ist, und 0, wenn der Winkel $90°$ ist. Dieses erhellet auch daraus, weil der Cosinus der Sinus der Ergänzung ist, welche abnimmt, indem der Winkel wächset. Wenn der Winkel größer als $90°$ wird, so erhält der Cosinus ck eine der vorherigen cb entgegengesetzte Lage, und wächset nun, in dem der Winkel bis zu $180°$ wächset, wo er dem Halbmesser gleich ist. Weil Dreyeck $ick = acb$, wenn $\sphericalangle ick =$

$<acb$ oder $acb = ice = 180°$, so ist ist $ck = cb$, das ist, die Cosinusse eines stumpfen und spitzen Winkels, welche zusammen 180° ausmachen, sind gleich, aber in Absicht auf ihre Lage entgegengesetzt. Man bezeichnet daher die Cosinusse der spitzen Winkel mit +, der stumpfen mit —, oder zieht in Rechnungen diese ab, wo jene addiret werden und umgekehret. Z. B. cosin. $60 = —$ cosin. 120°.

5) Satz. Die Tangenten wachsen mit den Winkeln und Bögen von 0° an bis zu 90°, aber schneller als diese, und um desto größere Unterschiede je näher der Winkel 90° kommt. Für 90° selbst ist die Tangente unendlich groß, weil es hier gar keinen Durchschnitt d der Secante mit der Tangente giebt, indem jene mit dieser parallel lauft. Hieraus erhellet zugleich, daß die Secanten ebenfalls von 0° an bis zu 90° mit zunehmenden Unterschieden wachsen, und für 0° gleich dem Halbmesser, für 90° unendlich groß sind, weil Secante Quadrat = Halbmesser Quadrat + Tangente Quadrat ist. Für Winkel über 90° fällt der Durchschnittspunct d' unter den Halbmesser ce, das ist, Secante und Tangente erhalten, in Absicht auf ihre vorige Lage bey den spitzen Winkeln, eine entgegengesetzte Lage, werden verneint, und nehmen ab, indem die stumpfen Winkel ice wachsen, bis sie für 180° wieder eben so groß werden, als sie bey 0° waren. Stumpfe Winkel und spitze ice, acb, welche zusammen 180° ausmachen, haben einerley, nur entgegengesetzte Tangenten und Secanten, weil Dreyeck $ced = ced'$ für $<ecd = ick = ecd'$.

6) Anmerkung. Aus dem 5ten Satz erhellet von selbst, wie sich Cotangente und Cosecante mit dem Winkel ändern, wenn man bedenkt, daß diese Linien Tangente und Secante der Ergänzung sind, und die Ergänzung abnimmt, indem der Winkel wächset. Der

Querſinus als der Unterſchied zwiſchen dem Coſinus und Halbmeſſer nimmt ab, wenn der Coſinus wächſet, und umgekehret. Aus den Sätzen 3, 4 und 5 ergiebt ſich, daß für einerley Halbmeſſer alle trigonometriſche Linien durch den Winkel beſtimmt ſind.

7) Satz. Für einerley Winkel und verſchiedene Halbmeſſer verhalten ſich die trigonometriſchen Linien wie die Halbmeſſer. Es ſeyen Fig. 3. zwiſchen den Schenkeln des Winkels c mit den Halbmeſſern ca, ce Bögen beſchrieben, ſo ſind ab, de die Sinuſſe, cb, cd die Coſinuſſe, gf, bi die Tangenten, cg, ci die Secanten für die Halbmeſſer ca, ce. Da die Dreyecke cab, ced; cgf, cih ähnlich ſind, ſo hat man folgende Proportionen:

ca : ce = ab : ed = cb : cd
cf : oh = gf : ih = cg : ci
cf = ca = ch : ce folglich
ca : ce = gf : ih = cg : ci

woraus der Satz für Sinus und Coſinus, Tangente und Secante folgt. Für die übrigen trigonometriſchen Linien wird der Satz eben ſo erwieſen, wenn man ſich die Figur dazu entwerfen will.

8) Anmerkung. Der vorſtehende Satz giebt nebſt einigen wenigen noch folgenden den Grund zu allen trigonometriſchen Proportionen an. Es würden aber dieſe Proportionen zur Auflöſung der Dreyecke nichts helfen, wenn die darin vorkommenden trigonometriſchen Linien nicht für einen gewiſſen Halbmeſſer bekannt wären. Der folgende Satz zeigt die Möglichkeit dieſer Forderung.

9) Satz. Der Sinus eines Winkels iſt gleich der halben Sehne des doppelten Winkels. Es ſey al Fig. 1. die Sehne des Winkels acl. Man fälle von c das Perpendikel cb auf ab, ſo wird dadurch al ſowohl als ∠acl halbiret, und es iſt ab = ½ al = Sin. acb = Sin. ½ acl.

10) An-

10) **Anmerkung.** Wäre al die Seite eines regulairen Vieleckes, deren Verhältniß zum Halbmesser gefunden werden kann, so ergäbe sich daraus der Sinus des halben Centriwinkels als die Hälfte der Seite des Vieleckes. Es sey zum Beyspiel al die Seite des Sechseckes = 1, wenn der Halbmesser 1 ist, so ist der Centriwinkel acl = 60°, ab oder der Sinus seiner Hälfte = Sin. 30° = $\frac{1}{2}$ dem halben Halbmesser gleich. Wäre al die Seite des in dem Kreis beschriebenen regulairen Vierecks, also für den Halbmesser 1 nach (Geom. 185) = $\sqrt{2}$, so wäre ab = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ der Sinus von 45°. Durch diese und einige andere Sätze, wie z. B. daß man aus den gegebenen Sinussen zweyer Winkel den Sinus ihrer Summe und ihres Unterschiedes finden kann, hat man von der letzten Hälfte des fünfzehnten Jahrhunderts an nach und nach die Sinusse und übrigen trigonometrischen Linien für alle Winkel von Minute zu Minute bis zu 90° berechnet. In diesem Jahrhundert sind die Tafeln der trigonometrischen Linien durch Hülfsmittel der höhern Geometrie berichtiget und erweitert, und insbesondere bey kleinen Winkeln bis auf einzelne Sekunden und Theile derselben ausgerechnet worden. Für Anfänger sind die kleinern Vlacquischen, Wolfischen und Vegaischen Tafeln der trigonometrischen Linien, welche den Arithm. 141. angeführten Logarithmentafeln beygedruckt sind, zu empfehlen. Den Gebrauch und die Einrichtung dieser Tafeln erlernt man nach der beygefügten Erläuterung oder durch mündlichen Unterricht sehr bald. In den beyden ersten Tafeln ist der Halbmesser = 10 Millionen in den letztern = 1 gesetzt. Dieses macht keinen wesentlichen Unterschied dieser Tafeln aus, indem die trigonometrischen Linien in jeder derselben in 10 Milliontheilen des Halbmessers angegeben sind, nur sind in den Vegaischen Tafeln alle Sinusse als Decimalbrüche in den beyden ältern als ganze Zahlen angegeben. Man verwandelt überhaupt

leicht den Sinus, welcher zu einem gewissen Halbmesser gehöret, nach (7. S.) in einen, welcher einem gegebenen Halbmesser zugehöret, z. B. den Sinus für den Halbmesser = 1000 aus dem Sinus für den Halbmesser = 10000000 zu finden. Ich heiße diesen Sin. tabularum, jenen schlechtweg Sinus, so hat man

10000000 : 1000 = Sin. tab. : Sin.

oder 10000° : 1 = Sin. tab. : Sin.

giebt den Sin. = $\frac{\text{Sin. tab.}}{10000^\circ}$. Das heißt, man schneide 4 Stellen von hinten von dem Sinus der Tafeln ab, und lese nur die übrig bleibenden als ganze Zahlen, um den Sinus für den Halbmesser = 1000 zu bekommen. Aus demselben Grunde hat man für den Halbmesser = 1; 10000000 : 1 = Sin. tab. Sin. giebt für den Sinus, der zum Halbmesser 1 gehöret, Sin. = $\frac{\text{Sin. tab.}}{10000000}$, man muß von dem Sinus der Tafeln 7 Stellen abschneiden, das ist, ihn ganz als einen Decimalbruch lesen, weil er überhaupt nur 7 Stellen haben kann. In der Ausübung ist es vortheilhaft, dem Halbmesser bald diese bald jene Größe beyzulegen. Z. B. in trigonometrischen Rechnungen erspahret man Multiplication und Division mit dem Halbmesser, wenn man ihn = 1 setzt. Will man die Winkel durch ihre trigonometrischen Linien messen, so ist es bequem, den Halbmesser = 1000 zu setzen, weil man eine Linie vermittelst des verjüngten Maaßstabes in so viel gleiche Theile theilen kann, und kleinere Theile in vielen Fällen der Ausübung nicht in Betracht kommen.

11) Anmerkung. Vermittelst der Sinustafeln lassen sich die Winkel folgendergestalt messen und in Graden und Minuten genauer als durch den Transporteur (Geom. 162.) angeben. Man nehme einen tausendtheiligen Maaßstab, ziehe mit der ganzen Länge desselben zwischen den Schenkeln des zu messenden

Winkels einen Bogen, und messe den Sinus dieses Bogens auf dem Maaßstab, die gefundene Zahl in den Sinustafeln so aufgesucht, daß man von den Sinussen die 4 letzten Ziffern abschneidet, giebt den zugehörigen Winkel in Graden und Minuten an. Der gemessene Sinus sey z. B. 750, so fällt der Sinus nach den Tafeln zwischen 48° 36, und 48° 40'. Wäre der Sinus in 10000 Theilen des Halbmessers bekannt, z. B. 750, 5, so wären die Gränzen des Winkels 48° 38' und 48° 39' nur um 1' verschieden. Will man vermittelst der Sinustafeln einen Winkel auftragen, so ziehe man mit dem angenommenen Halbmesser = 1000 einen Bogen, suche für diesen Halbmesser Sinus und Cosinus des aufzutragenden Winkels in den Tafeln, trage den Cosinus von dem Scheitel aus auf den einen Schenkel, und bestimme die Lage des andern Schenkels, daß man mit dem Sinus von dem nach dem Bogen zu befindlichen Endpuncte des aufgetragenen Cosinus in den Bogen einschneidet. Oder man fälle auf den Endpunct des Cosinus ein Perpendikel, und verlängere es, bis es den Bogen trifft.

Noch bequemer zum Auftragen und Messen der Winkel, als die Sinusse, sind die Sehnen, welche man aus den Sinustafeln durch Verdoppelung derselben für alle Winkel bis zu 180° von 2 zu 2 Minuten erhält. Vermittelst einer Chordentafel und eines tausendtheiligen Maaßstabes einen Winkel zu messen, ziehe man mit dem Halbmesser = 1000 einen Bogen zwischen den Schenkeln des Winkels, messe die zugehörige Sehne auf dem Maaßstab, und suche sie in der Chordentafel, um den Werth des Winkels in Graden und Minuten zu finden. Einen in Graden gegebenen Winkel aufzutragen, ziehe man mit dem Halbmesser = 1000 einen Bogen, und trage auf denselben die zu dem Winkel gehörige Sehne nach dem verjüngten 1000theiligen Maaßstab.

Man erspahret die Chordentafel, wenn man sich, wie folgt, einen Chordenmaaßstab verfertigt. Man berechne durch Verdoppelung der Sinusse von 30 zu 30 Minuten die Chorden von Grad zu Grad für den Halbmesser = 1000, wie folgt:

	Chorde.		Chorde.		Chorde.
1° —	17,4	31° —	534,4	61° —	1015,0
2° —	34,9	32° —	551,2	62° —	1030,0
3° —	52,3	33° —	568,0	63° —	1044,9
4° —	69,7	34° —	584,7	64° —	1059,8
5° —	87,2	35° —	601,4	65° —	1074,5
6° —	104,6	36° —	618,0	66° —	1089,2
7° —	122,0	37° —	634,6	67° —	1103,8
8° —	139,5	38° —	651,1	68° —	1118,3
9° —	156,9	39° —	667,6	69° —	1132,8
10° —	174,3	40° —	684,0	70° —	1147,1
11° —	191,6	41° —	700,4	71° —	1161,4
12° —	209,0	42° —	716,7	72° —	1175,5
13° —	226,4	43° —	733,0	73° —	1189,6
14° —	243,7	44° —	749,2	74° —	1203,6
15° —	261,0	45° —	765,3	75° —	1217,5
16° —	278,3	46° —	781,4	76° —	1231,3
17° —	295,6	47° —	797,4	77° —	1245,0
18° —	312,8	48° —	807,4	78° —	1258,6
19° —	330,0	49° —	829,3	79° —	1272,1
20° —	347,2	50° —	845,2	80° —	1285,5
21° —	364,4	51° —	861,0	81° —	1298,8
22° —	381,6	52° —	876,7	82° —	1312,1
23° —	398,7	53° —	892,3	83° —	1325,2
24° —	415,8	54° —	907,9	84° —	1338,2
25° —	432,8	55° —	923,4	85° —	1351,1
26° —	449,9	56° —	938,9	86° —	1363,9
27° —	466,8	57° —	954,3	87° —	1377,7
28° —	483,8	58° —	969,6	88° —	1389,3
29° —	500,7	59° —	984,8	89° —	1401,8
30° —	517,6	60° —	1000,0	90° —	1414,2

Die berechneten Chorden trage man nach einem 1000theiligen Maaßstab, welcher nicht zu klein seyn darf, auf die beyden äussersten Parallelen, wie Fig. 4. zeigt, und verbinde sie durch Diagonalen. Hat man auf das Perpendikel zwischen beyden Parallelen, wie in der Figur, 10 gleiche Theile getragen, und durch jeden Theilungspunct Parallelen gelegt, so wird jede berechnete Chorde durch die Transversalen in 10 gleiche Theile getheilet. Das ist, man erhält die Chorden von 6 zu 6 Minuten, weil bey kleinen Unterschieden der Winkel die Unterschiede der Sehnen sich sehr nahe wie die Unterschiede der Bögen oder Winkel verhalten, also gleich sind, wenn diese gleich sind. Befänden sich zwischen den beyden äussersten Parallelen 20 gleiche Theile, so erhält man auf dieselbe Weise die Sehnen von 3 zu 3 Minuten. Kleinere Theile hat man kaum zu bestimmen nöthig, weil, wenigstens bey Aufgaben der practischen Geometrie, in Zeichnung der Figuren leicht größere Fehler begangen werden können. Der Gebrauch eines solchen Chordenmaaßstabes wird aus dem Vorhergehenden von selbst erhellen. Man beschreibt in den gegebenen Winkeln mit dem Halbmesser, d. i. der Sehne von 60° Bögen, und misset die Sehnen derselben auf dem Chordenmaaßstab, oder trägt in die beschriebenen Bögen die Sehnen, wenn die Winkel erst verzeichnet werden sollen. Stumpfe Winkel misset und verzeichnet man durch ihre spitzen Nebenwinkel.

12) Anmerkung. Wenn man mit dem Geom. (65) angeführten Mayerischen Recipiangel einen Chordenmaaßstab, oder verjüngten Maaßstab nebst Chordentafel verbindet, so erhellet, wie man dieses einfache Instrument auch zur Bestimmung der Winkel in Graden und Minuten gebrauchen könne. Da es dem practischen Mechaniker leichter ist, gerade Linien als Kreisbögen mit gehöriger Schärfe in gleiche Theile zu theilen,

so mögte der Gebrauch des Recipiangels für den Feldmesser dadurch noch vortheilhafter werden, daß man die Endpuncte seiner Halbmesser mit einer in gleiche Theile (etwa 10000 Theile des Halbmessers) getheileten Regel verbände, die an dem einen Schenkel des Recipiangels bey a (Fig. 40. Geom.) in einem Scharnier lief, damit sie alle Stellungen nach der Oeffnung des Recipiangels annehmen könnte. Die auf der Regel durch die Schenkel des Recipiangels abgeschnittenen Theile würden vermittelst einer Chordentafel die Größe des Winkels angeben. Auf einer ähnlichen Einrichtung beruht Branders amphidioptrischer Goniometer, welches auch zu astronomischem Gebrauch dienet.

13) Satz. Alle trigonometrischen Linien sind durch den Sinus und den Halbmesser gegeben. Der Cosinus cb Fig. 1. ist $= \sqrt{ca^2 - ab^2} = \sqrt{r^2 - Sin^2}$, wenn der Halbmesser $= r$.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke cba, ced hat man

1) cb : ba = ce : de
2) cb : ca = ce : cd

aus 1) de oder tang. $= \frac{ce \cdot ba}{cb} = \frac{r \cdot Sin}{cosin}$

aus 2) cd oder Sec. $= \frac{ce \cdot ca}{cb} = \frac{r^2}{cosin}$,

also Tangente und Secante durch den Sinus und Halbmesser bestimmt, weil es der Cosinus ist.

Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke cfa, cgh fließet

3) cf : fa = cg : gh
4) cf : ca = cg : ch

also $gh = \text{cotang.} = \frac{fa \cdot cg}{cf} = \frac{cb \sin r}{\sin.}$

$ch = \text{cosec.} = \frac{cg \cdot ca}{cf} = \frac{r^2}{\sin.}$;

folglich auch Cotangente und Cosecante durch Sinus und Halbmesser bestimmt.

14) Anmerkung. Aus 13 erhellet, wie die übrigen trigonometrischen Linien berechnet werden konnten, sobald die Sinusse gefunden waren. Die Tafeln enthalten alle Sinusse und Tangenten, einige auch die Secanten bis zu 90°. Die Cosinusse, Cotangenten und Cosecanten sind unter den ersten begriffen, weil sie die Sinusse, Tangenten und Secanten der Ergänzungen zu 90° sind.

Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.

15) Aufgabe. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck so viel gegeben ist, daß das Dreyeck dadurch bestimmt wird, das unbekannte durch Rechnung zu finden.

Hier sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1) Die Hypotenuse und einer der spitzen Winkel gegeben.
2) Die Hypotenuse und eine der beyden Seiten gegeben.
3) Die beyden Seiten gegeben.
4) Eine Seite und ein spitzer Winkel gegeben.

Auflösung für 1) und 2). Man beschreibe mit der Hypotenuse einen Bogen, so ist bc Fig. 5. der Sinus, ac der Cosinus des Winkels a für den Halbmesser ab. Stellt man sich eben so mit dem Halbmesser der Tafeln aB einen Bogen von a aus beschrieben vor, so ist BC, aC Sinus und Cosinus der Tafeln für den Winkel a, und man hat

$$aB : BC = ab : bc \text{ oder}$$
$$r : \text{Sin. } a = ab : bc \quad I)$$

ferner:

$$aB : aC = ab : ac \text{ oder}$$
$$r : \text{cosin. } a = ab : ac \quad II)$$

r bedeutet ein- für allemal den Halbmesser der Tafeln oder Sin. totus. Aus diesen Proportionen folgt für

1) $bc = \frac{ab \cdot \text{Sin. } a}{r}$ und $ac = \frac{ab \cdot \text{cosin. } a}{r}$,

für 2) $\text{Sin. } a = \frac{bc \cdot r}{ab}$.

Wenn der eine spitze Winkel bekannt ist, so ist es auch der andere. Auflösung für 3) und 4). Man ziehe mit einer Seite einen Bogen, so ist die andere Seite die Tangente, die Hypotenuse die Secante, und man hat folgende Proportionen, worin aC den Halbmesser der Tafeln bedeutet:

$$ac : bc = aC : BC \text{ oder}$$
$$III) \quad ac : bc = r : \text{tang. } a$$

giebt $\text{tang. } a = \frac{r \cdot bc}{ac}$;

ferner $aC : aB = ac : ab$ oder

$$IV) \quad r : \text{Sec. } a = ac : ab$$

giebt die Hypotenuse $ab = \frac{ac \cdot \text{sec. } a}{r}$.

Für Tafeln, welche keine Secanten enthalten, findet man die Hypotenuse auch aus der Proportion I $ab = \frac{bc \cdot r}{\text{sin. } a}$.

15) Anmerkung. Alle trigonometrische Auflösungen beruhen auf geometrischen Proportionen, worinn

ein Glied gesucht wird. Es kommen daher bey denselben beständig Multiplicationen und Divisionen der trigonometrischen Linien und der Seiten der Dreyecke in Zahlen ausgedruckt vor. Um die Rechnung sich zu erleichtern, kann man den Halbmesser (wo keine sehr große Schärfe nöthig ist) = 1000 setzen, d. i. nach (10.) die vier letzten Ziffern der Tafeln weglassen. Viel schärfer und eben so leicht erhält man die gesuchten Grössen, wenn man sich der Logarithmen bedienet. In dieser Absicht hat man für die trigonometrischen Linien, als Zahlen betrachtet, die Logarithmen berechnet. Um dabey eine auch für sehr große Dreyecke hinlängliche Schärfe zu erhalten, hat man den Halbmesser = 10000000000 angenommen und die trigonometrische Linien und ihre Logarithmen bis auf 10000 Millionentheilchen des Halbmessers genau angegeben. Man denke sich das Briggische Logarithmensystem, bis zur Zahl 10000000000 fortgesetzt, so gehöret zu dieser Zahl nach (Arithm. 135.) der Logarithme = 10. Daher findet man in den Tafeln für log. rad. oder log. Sin. tot. = 10 Kennziffern und lauter Nullen. Die Logarithmen der Sinusse, als Brüche des Halbmessers, haben allekleinere Kennziffern, die Logarithmen der Tangenten von 0^{01} bis zu 45° kleinere, von 45° bis zu 90° größere Kennziffern als 10, weil tang. 45° = rad ist. In den kleinern oben angeführten Tafeln sind die trigonometrischen Linien selbst für den Halbmesser = 10000000, die Logarithmen der trigonometrischen Linien aber für den 1000 mal größern Halbmesser angegeben, daher darf man diese Logarithmen nicht geradezu für die Logarithmen der zu den trigonometrischen Linien in den Tafeln gehörigen Zahlen ansehen.

17) Anmerkung. Als Beyspiele zur Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke mögen die folgenden Aufgaben dienen. Wie groß sind die Winkel des rechtwink-

lichten Dreyecks, in welchem die drey Seiten die Verhältniß 3, 4, 5 haben? Man heiße den kleinsten Winkel Fig. 5., welche der kleinsten Seite gegen über stehen muß, a, so hat man aus III. tang. $a = \frac{r \cdot 4}{3} =$ 10000000 $\frac{1}{3} = 7.5000000$ fällt zwischen die Tangente von 36°52′ und 36°53′, jedoch näher zur ersten. Wollte man den Winkel genauer in Secunden finden, so kann dieß durch Proportionaltheile folgendergestalt geschehen. Man sage, der Unterschied der nächsten Tangente in den Tafeln zum Unterschiede der gegebenen Tangente und der nächst kleinern der Tafeln, verhalte sich wie 60 Secunden zur gesuchten Zahl von Secunden, welche zum kleinern Winkel addiret werden muß.

Dieß giebt

$$4446 : 881 = 60 : 12''$$

also $< a = 36° 52' 12''$; folglich $< b = 53°7'48''$.

Wäre bc die zu findende Höhe eines Thurmes, ac die gemessene Standlinie = 100 Fuß, $< a = 63°$, so hat man aus III. $bc = \frac{ac \cdot tang.\, a}{r} = \frac{100 \cdot tang.\, 63°}{r}$.

Dieß mit Logarithmen berechnet giebt

log. tang.	63° =	10.2928341
log.	100 =	2.0000000
Summe	=	12.2928341
abgezogen log.	r. =	10.0000000
log.	bc =	2.2928341

gehöret als Logarithme einer Zahl unter der Kennziffer 3 aufgesucht, zu 196,2, welches die Höhe des Thurmes in Fußen und Zehntheilen wäre.

Auflösung der gleichschenklichten Dreyecke.

18) Satz. Ein gleichschenklichtes Dreyeck Fig. 6. läßt sich durch ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundlinie in zwey gleiche rechtwinklichte Dreyecke zerlegen, und so die Auflösung der gleichschenklichten Dreyecke auf die Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke zurückbringen. Man hat dabey folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die Grundlinie gegeben und einer der spitzen Winkel a) ein an der Grundlinie anliegender b) ihr gegen über stehender
2) Ein Schenkel und ein Winkel gegeben a) der Winkel an der Spitze b) ein Winkel an der Grundlinie.

Wenn ein Winkel in einem gleichschenklichten Dreyeck gegeben ist, so sind sie alle bekannt. Ist es der Winkel an der Spitze, so ziehe man ihn von 180° ab, und halbire den Unterschied, so hat man die beyden Winkel an der Grundlinie, ist ein Winkel an der Grundlinie bekannt, so ziehe man sein Doppeltes von 180° ab, um c, oder den Winkel selbst von 90° ab, um $\frac{1}{2}$ c zu erhalten.

Für 1). Man ziehe mit halb ab = db von b aus einen Bogen, so ist dc = tang. b, bc = Sec. b für den Halbmesser db, daher

I) r : tang. b = db. : dc
II) r : Sec. b = db : bc

Für 2). Man ziehe mit cb von c aus einen Bogen, so ist db = Sin. $\frac{1}{2}$ c, cd = cosin. $\frac{1}{2}$ c, also

III) r : Sin. $\frac{1}{2}$ c = cb : db = $\frac{1}{2}$ ab
IV) r : cosin. $\frac{1}{2}$ c = cb : cd

Die Proportion III. dienet auch cb ohne Secanten zu finden, wenn db bekannt ist, denn es ist cb = $\frac{r \cdot db}{Sin. \frac{1}{2} c}$.

Beyspiel: ab sey die Seite eines Polygons, welche aus dem Halbmesser cb des Kreises und dem Centriwinkel c bestimmt werden soll. Aus III. hat man $db = \frac{1}{2} ab = \frac{cb \text{ Sin. } \frac{1}{2} c}{r}$, folglich $ab = \frac{2\,cb \text{ . Sin. } \frac{1}{2} c}{r}$.

Es sey ab die Seite des Siebenecks der Halbmesser cb = 1000, der Centriwinkel $c = \frac{360}{7} = 51° 25\frac{5}{7}'$, $\frac{1}{2} c = 25° 42\frac{6}{7}'$, so findet man ab durch Logarithmen

	log. Sin. 25° 43′	= 9.6374108
	log. cb	= 3.0000000
		= 12.6374108
—	log. r	= 10.
	log. $\frac{1}{2}$ ab = 433,9	= 2.6374108

ab = 867,8.

Sucht man aus der Seite des Siebenecks = 1000 den Halbmesser, so braucht man den Ausdruck $cb = \frac{r \text{ . } db}{\text{Sin. } \frac{1}{2} c}$, wo db = 500 ist,

	log. 500	= 2.6989700
	log. r	= 10.
	Summe	12.6989700
	log. Sin. 25° 43′	= 9.6374108
	log. 1152,3	= 3.0615592

anders Beyspiel.

ab Fig. 6. sey ein Gegenstand, dessen Größe man weiß, in c befinde sich ein Auge, das nach dem Gegenstand hinsieht. Man habe ein Mittel gefunden, den Winkel acb, welchen der Gegenstand am Auge macht, (seine scheinbare Größe) zu messen, so läßt sich

daraus die Entfernung cd des Gegenstandes von dem Auge berechnen.

Man hat aus I $cd = \frac{db \,.\, \text{tang. } b}{r}$, oder weil b die Ergänzung von $\frac{1}{2}$ c zu 90° ist, also tang. b = cotang. $\frac{1}{2}$ c, so hat man auch $cd = \frac{db \,.\, \text{cotang. } \frac{1}{2} c}{r}$.

Es sey der Gegenstand ein Mensch, dessen Höhe 6 Fuß, der Winkel, den er am Auge macht = 30′, wie weit ist der Mensch entfernt?

log. db = l. 3	=	0.4771213
log. cotang 15′	=	12.3601799
		12.8373012
log. r	=	10.
log. 687,6	=	2.8373012

Suchte man umgekehrt aus der scheinbaren Größe und Entfernung die wahre Größe des Gegenstandes, so hat man aus der Proportion I. $db = \frac{r \,.\, dc}{\text{tang. } b} = \frac{r \,.\, dc}{\text{cotang. } \frac{1}{2} c}$:

Die scheinbare Größe des Mondes ist 31′29″, wofür ich 31′30″ schreibe, seine mittlere Entfernung von der Erde 60 Erdehalbmesser, wie groß ist sein wahrer Durchmesser in Vergleich gegen den Durchmesser der Erde? Hier ist dc = 60, $\frac{1}{2}$ c = 15′45″

log. 60	=	1,7781513
log. r	=	10,
		11,7781513
log. cotang. 15′45″	=	12,3435915

zum obersten Logarithmen 1 geliehen und abgezogen giebt für den log. db = 0.4345598 — 1 gehöret zu 0,272. So viel Erdehalbmesser beträgt der Halbmesser des Mondes oder der Durchmesser des Mondes Erdedurchmesser.

19) Anmerkung. Die nachstehenden Zahlen, welche zu einer genauen Construction der regulairen Vielecke vorzüglich bequem sind, konnten vermittelst des vorstehenden Satzes berechnet werden.

Zahl der Seite	Seite für den Halbm. 1000	Halbm. für die Seite 1000
III.	1732,0	577,4
IV.	1414,2	707,1
V.	1175,6	850,7
VI.	1000,0	1000,0
VII.	867,8	1152,3
VIII.	765,4	1306,6
IX.	684,0	1461,9
X.	618,0	1618,0
XI.	563,5	1774,7
XII.	517,6	1931,8

Ein regulaires Vieleck in den Kreis zu beschreiben, ziehe man den Kreis mit einem Halbmesser = 1000, oder theile den gegebenen Halbmesser in 1000 gleiche Theile, messe auf diesem Maasstab die Zahl, welche der Seite des zu zeichnenden Polygons zugehört, und trage diese Größe in dem Umfang des Kreises herum. Sollte über eine gegebene Seite des Polygons das Polygon beschrieben werden, so suche man den zugehörigen Halbmesser in der dritten Columne, und beschreibe damit über der Seite des Polygons ein gleichschenklichtes Dreyeck, so bestimmt sich dadurch der Mittelpunct des Kreises, und der Kreis, in dessen Umfang die Seite des Vielecks herumgetragen werden kann.

20) Satz. In jedem Dreyeck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel. Denn man beschreibe um das Dreyeck Fig. 7. einen Kreis, benenne die Seiten und Winkel, wie sie einander gegenüber stehen, mit gleichen Buchstaben, die Winkel mit den großen, die Seiten mit den kleinen Buchstaben, so ist b = Sehne ADC = 2 Sin. $\frac{1}{2}$ ADC = 2 Sin. B, aus eben dem Grunde a = 2 Sin. A, c = 2 Sin. C, folglich

a : b = 2 Sin. A : 2 Sin. B = Sin. A : Sin. B
b : c = 2 Sin. B : 2 Sin. C = Sin. B : Sin. C.
a : c = 2 Sin. A : 2 Sin. C = Sin. a : Sin. c.

11) Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz ist einer der wichtigsten in der Dreyeckslehre, auf ihm beruht ein großer Theil der Ausmessung des Himmels und der Erde. Die folgenden Beyspiele werden dieß, so viel es hier thunlich ist, zeigen. Der 20 Lehrsatz kann nur da angewendet werden, wo unter den gegebenen Dingen eines Dreyecks eine Seite und ein Winkel einander gegen über stehen.

22) Aufgabe. Wenn in einem Dreyeck eine Seite und zwey Winkel gegeben sind, das übrige durch Rechnung zu finden. Weil in diesem Fall die drey Winkel gegeben sind, indem der dritte die Ergänzung von den beyden ersten zu 180° ist, so braucht man nur die beyden unbekannten Seiten zu finden. Es sey Fig. 7. AB und die Winkel bekannt. Man setze

Sin. C : AB = Sin. A : BC
Sin. C : AB = Sin. B : AC

woraus BC und AC bekannt sind.

1tes Beyspiel: acb Fig. 8 sey ein durch die Pole der Erde gehender größter Kreis (Meridian) a ein Bewohner in der Nähe des Poles, b ein anderer

in der Nähe des Aequators; dem ersten stehe der Mond d im Horizonte, während er dem andern über dem Scheitel ist. Man habe Mittel gefunden, den Bogen ab, als die Entfernung der beyden Orte und den dazu gehörigen Winkel acb am Mittelpunct der Erde zu bestimmen, zieht man diesen Winkel von 90° ab, so bleibt adc übrig, welches in der Astronomie die Horizontalparallaxe des Mondes heißt. Sie ist in der mittlern Entfernung des Mondes 56′ 38″ (wofür ich 57′ schreibe). Hieraus findet man die Entfernung des Mondes von dem Mittelpuncte der Erde durch folgende Proportion:

Sin. d : ac = Sin. a : cd oder

Sin. 57 : Halbm. der Erde = Sin. tot. : cd

giebt den Halbmesser der Erde = 1 gesetzt und mit Logarithmen gerechnet,

log. Sin. tot.	=	10.0000000
log. 1.	=	0
		10.0000000
log. Sin. 57′	=	8.2195811
log. 60, 52	=	1.7804189

So viel Erdehalbmesser beträgt die mittlere Entfernung des Mondes. Multipliciret man diese Zahl durch 860, so erhält man die Entfernung in deutschen Meilen = 51875.

2tes Beyspiel: Die Breite eines Strohmes geom. 66. trigonometrisch zu berechnen. In dem Dreyeck bcd (Fig. 41. geom.) sind die Winkel c und d nebst der Seite cd gegeben, man sucht cb

Sin. b : cd = Sin. d : ab.

Es sey c = 70, d = 54° also b = 56° cd = 1000 Fuß, so giebt die Rechnung mit Logarithmen geführt

log.

log. 1000 = 3.0000000
log. Sin. 54° = 9.9079576
12.9079576
log. Sin. 56° = 9.9785742
975,8 = 2.9893834

Hätte man auch den Winkel adc gemessen, so ließe sich ac aus dem Dreyeck acd auf gleiche Weise berechnen,

Sin. a : cd = Sin. adc : ac

Es sey < adc = 20° 30′, also < cad = 89°30′, so ist

log. 1000 = 3.0000000
Sin. log. 20°30′ = 9.5443253
12.5443253
log. Sin. 89°30′ = 9.9999371
log. 350,3 = 2.5443882

folglich die Breite des Strohmes ab = 975,8 — 350,3 = 625,5 Fuß.

3tes Beyspiel: Die Höhe eines Thurmes oder eines Berges und dergleichen zu messen, zu dessen untern Punct man nicht kommen kann. Man messe an einem schicklichen Ort eine horizontale Standlinie ab Fig. 9., weder allzunahe, noch allzuferne von der zu messenden Höhe cd, damit die Winkel des Dreyecks abc nicht zu spitz ausfallen. Ich nehme an, man habe die Winkel cab und cbd in einer verticalen Ebene gemessen, so läßt sich die Höhe cb folgendermaßen berechnen: < cbd — cab = acb daher in dem Dreyeck acb

Sin. acb : ab = Sin. cab : bc,

woraus bc gegeben ist, also in dem rechtwinklichten Dreyeck bcd

Sin. tot. : bc = Sin. cbd : cd die gesuchte Höhe. Es sey ab = 500′, < cab = 24 12′, cbd = 32°16′, also < acb = 8° 4′,

Sin. 8° 4′ : 500 = Sin. 24°12′ : bc

log. Sin. 24°12′	=	9.6127023
log. 500	=	2.6989700
		12.3116723
log. Sin. 8° 4′	=	9.1471358
log. 1460,6 = log. bc	=	3.1645365
Sin. tot. : 1460,6	=	Sin. 32°16′.
log. Sin. 32°16′	=	9.7274278
log. 1460,6	=	3.1645365
		12.8919643
log. Sin. tot.	=	10
log. 779,7	=	2.8919643

giebt die gesuchte Höhe 779,7 Fuß.

23) Anmerkung. Die trigonometrische Höhenmessung der Berge hat besondere Schwierigkeiten, theils wegen der Wahl und Bestimmung der horizontalen Standlinie, welches in bergichten Gegenden oft keine leichte Sache ist, theils wegen des Einflusses der Strahlenbrechung, die nach der Beschaffenheit der Luft veränderlich ist, und des Unterschiedes zwischen der wahren und scheinbaren Horizontallinie. Jene vergrößert, und diese verkleinert die wahre Höhe. Ueber beyde hat man Tafeln berechnet, wovon die Gründe an ihrem gehörigen Otte in der angewandten Mathematik beygebracht werden sollen. Als ein Beyspiel, wie diese Correctionen in Rechnung gebracht werden müssen, führe ich folgende Höhenmessung des Melibocus in der Bergstrasse von meinem Bruder hier an. Der Standpunct a Fig. 9. war unweit Darmstadt. Die Entfernung

des Berges von dem Darmstädter Kirchthurm = de war durch vorige Messungen und trigonometrische Rechnungen = 52340 rheinländische Fuß gefunden worden, ae betrug 2980 dieser Fuße < acd = 66°. Hieraus ergab sich ad (nach 24. Aufgabe) = 53428′, der Winkel cad wurde vermittelst einer Sissonischen Wasserwaage mit Mikrometerschraube 1°15′22,2 Sec. bestimmt. Die Refraction vergrößerte diesen Winkel um 29,7 Sec., also blieb nach Abzug derselben für den Winkel cad = 1°14′52,5″. Dieses gab aus der Proportion ad : dc = r : tang. cad. Die Höhe des Berges 1163,7 Fuß, hierzu die Erhebung der scheinbaren über die wahre Horizontallinie = 70,33′ gab die corrigirte Höhe des Berges ohne den darauf befindlichen Thurm = 1234,03 rheinl. Fuß über die Oberfläche der Erde bey Darmstadt.

24) Aufgabe. Aus zwey Seiten und einem Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegen über steht, das übrige in einem Dreyeck zu finden.

Man suche zuerst noch einen Winkel, und dann die dritte Seite. Es sey Fig. 7. AB, AC und < C gegeben, man setze

AB : Sin. C = AC : Sin. B

giebt < B also auch A, folglich

Sin. C : AB = Sin. A : BC

auch BC gegeben.

Im Beyspiel der 23. Anmerk. sind de = 52340′, ae = 2980′ und < a = 66° gegeben, daher

52340 : Sin. 66 = 2980 : d

log. 2980	=	3.4740705
log. Sin. 66°	=	9.9607302
		13.4348007
log. 52340	=	4.7188337
log. Sin. 2°50′ = d	=	8.7159670

Sin. tot. : bc = Sin. cbd : cd die gesuchte Höhe. Es sey ab = 500′, ∠cab = 24 12′, cbd = 32°16′, also ∠acb = 8° 4′,

Sin. 8°4′ : 500 = Sin. 24°12′ : bc

log. Sin. 24°12′	=	9.6127023
log. 500	=	2.6989700
		12.3116723
log. Sin. 8° 4′	=	9.1471358
log. 1460,6 = log. bc	=	3.1645365
Sin. tot. : 1460,6	=	Sin. 32°16′.
log. Sin. 32°16′	=	9.7274278
log. 1460,6	=	3.1645365
		12.8919643
log. Sin. tot.	=	10
log. 779,7	=	2.8919643

giebt die gesuchte Höhe 779,7 Fuß.

23) Anmerkung. Die trigonometrische Höhenmessung der Berge hat besondere Schwierigkeiten, theils wegen der Wahl und Bestimmung der horizontalen Standlinie, welches in bergichten Gegenden oft keine leichte Sache ist, theils wegen des Einflusses der Strahlenbrechung, die nach der Beschaffenheit der Luft veränderlich ist, und des Unterschiedes zwischen der wahren und scheinbaren Horizontallinie. Jene vergrößert, und diese verkleinert die wahre Höhe. Ueber beyde hat man Tafeln berechnet, wovon die Gründe an ihrem gehörigen Orte in der angewandten Mathematik beygebracht werden sollen. Als ein Beyspiel, wie diese Correctionen in Rechnung gebracht werden müssen, führe ich folgende Höhenmessung des Melibocus in der Bergstrasse von meinem Bruder hier an. Der Standpunct a Fig. 9. war unweit Darmstadt. Die Entfernung

des Berges von dem Darmstädter Kirchthurm = d e war durch vorige Messungen und trigonometrische Rechnungen = 52340 rheinländische Fuß gefunden worden, a e betrug 2980 dieser Fuße < a c d = 66°. Hieraus ergab sich a d (nach 24. Aufgabe) = 53428', der Winkel c a d wurde vermittelst einer Sissonischen Wasserwaage mit Mikrometerschraube 1°15'22,2 Sec. bestimmt. Die Refraction vergrößerte diesen Winkel um 29,7 Sec., also blieb nach Abzug derselben für den Winkel c a d = 1°14'52,5". Dieses gab aus der Proportion a d : d c = r : tang. c a d. Die Höhe des Berges 1163,7 Fuß, hierzu die Erhebung der scheinbaren über die wahre Horizontallinie = 70,33 gab die corrigirte Höhe des Berges ohne den darauf befindlichen Thurm = 1234,03 rheinl. Fuß über die Oberfläche der Erde bey Darmstadt.

24) Aufgabe. Aus zwey Seiten und einem Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegen über steht, das übrige in einem Dreyeck zu finden.

Man suche zuerst noch einen Winkel, und dann die dritte Seite. Es sey Fig. 7. A B, A C und < C gegeben, man setze

A B : Sin. C = A C : Sin. B

giebt < B also auch A, folglich

Sin. C : A B = Sin. A : B C

auch B C gegeben.

Im Beyspiel der 23. Anmerk. sind d e = 52340', a e = 2980' und < a = 66° gegeben, daher

52340 : Sin. 66 = 2980 : d

log. 2980	=	3.4740705
log. Sin. 66°	=	9.9607302
		13.4348007
log. 52340	=	4.7188337
log. Sin. 2°50' = d	=	8.7159670

Sin. $2°50'$: 2980 = Sin. e : ad

$e = 180° - 66° - 2°50' = 111°10'$

log. Sin. $111°10'$ = 9.9696647

log. 2980 = 3.4740705

13.4437352

log. Sin. $2°50'$ = 8.7159670

log. 53428 = ad = 4.7277682

25) Satz. In jedem Dreyeck Fig. 10. verhält sich die Summe der beyden Seiten $ab + ac$ zu ihrer Differenz $ac - ab$ wie die Tangente der halben Summe der beyden Winkel b und c zur Tangente ihres halben Unterschiedes.

Man ziehe mit der kleinern der beyden Seiten ab einen halben Kreis dbe, in demselben die Sehnen eb, db verlängere eb nach f, und ziehe fc parallel mit db. $\angle ebd = bfc = R$. $\angle eab = b + c$ im Dreyeck abc als äusserer Winkel, ferner $\angle eab = adb + abd$ im Dreyeck adb, aber $adb = abd$, weil $ab = ad$, folglich ist $adb = \frac{1}{2} eab = \frac{1}{2}(a+b)$. $\angle ecf = adb = \frac{1}{2}(a+b)$. $\angle dbc = b - abd = b - \frac{1}{2}(a+b) = b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b-a)$. Es ist ferner $dbc = bcf$ folglich $bcf = \frac{1}{2}(b-a)$. Weil $\angle ebd = R = f$, so ist, wenn man mit cf einen Bogen zieht, ef die Tangente von $ecf = \frac{1}{2}(b+a)$ und bf die Tangente von $bcf = \frac{1}{2}(b-a)$ für den Halbmesser cf. Nun ist 1) ef : be = ac : dc aber $ec = ac + ea = ac + ab$, $dc = ac - ad = ac - ab$, folglich für ef, be, ec, dc in der Proportion 1) ihre Werthe geschrieben, giebt tang. $\frac{1}{2}(a+b)$: tang. $\frac{1}{2}(a-b) = ac + ab : ac - ab$, welches zu erweisen war.

26) Anmerkung. Der 25te Satz findet seine Anwendung bey Dreyecken, worin zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, indem man

durch ihn den halben Unterschied der beyden unbekannten Winkel erhält. Aus dem gefundenen halben Unterschied und der bekannten halben Summe der beyden Winkel findet man die Winkel selbst, wenn man von der halben Summe den halben Unterschied abzieht für den kleinern, und die halbe Summe zu dem halben Unterschied addiret für den größern Winkel. Dieser Satz ist allgemein, und gilt für alle Größen. Es seyen z. B. A, B zwey Zahlen, deren Summe S = 20, Unterschied d = 8, man sucht die beyden Zahlen. Wenn A = B wäre, so müßte jede Zahl = ½ S seyn, damit sie zusammen die ganze Summe 20 ausmachten, alsdann würde der Unterschied = 0 seyn, da er aber = 8 seyn soll, so halbire man ihn, und mache die eine Zahl um den halben Unterschied größer, die andere um den halben Unterschied kleiner, als die halbe Summe, so haben beyde Zahlen den gegebenen Unterschied und die gegebene Summe

$$A = \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} d = 10 + 4 = 14$$
$$B = \tfrac{1}{2} S - \tfrac{1}{2} d = 10 - 4 = 6$$

Summa	S	=	20
Unterschied	d	=	8

27) Aufgabe. In einem Dreyeck abc Fig. 10. sind zwey Seiten ab, ac und der eingeschlossene Winkel a gegeben, man soll das übrige durch Rechnung finden. Man suche zuerst die unbekannten Winkel vermittelst des 25. Satzes, und hierauf die dritte Seite.

Beyspiel. bc Fig, 10. sey die Entfernung zweyer Oerter, welche gefunden werden soll, die Linien ab, ac und der Winkel a seyen gegeben ab = 112, ac = 250, $\sphericalangle a = 32°$, $180° - 32° = 148° = b + c$, $74° = \frac{1}{2}(b + c)$

$$250 + 112 : 250 - 112 = \text{tang. } 74° : \text{tang. } \tfrac{1}{2} b - c$$
$$362 : 138 = \text{tang. } 74° : \text{tang. } \tfrac{1}{2} b - c$$

log. tang. 74° = 10. 5425036
log. 138 = 2. 1398791
12. 6823827
log. 362 = 2. 5587086
log. tang. 53°3′ = 10. 1236741

74° = ½ a + b
53°3′ = ½ a − b
127°3′ = b
20°57′ = c

Sin. c : ab = Sin. a : bc
log. Sin. 32° = 9. 7242097
log. 112 = 2. 0492180
11. 7734277
log. Sin. 20°57′ = 9. 5533406
log. bc = 166 = 2. 2200871

28) **Aufgabe.** Aus den drey Seiten eines Dreyecks Fig. 1. die Winkel durch Rechnung zu finden. Man beschreibe mit der kleinsten Seite cb von b aus einen Kreis, und verlängere ab, bis sie in f den Umfang des Kreises abermals schneidet, so hat man vermöge Geom. (173):

ac : af = ah : ag das ist
ac : ab+bc = ab−bc : ag

also ist ag durch lauter bekannte Größen gegeben, folglich gc = ac — ag. Man fälle von b auf gc das Perpendikel be, welches gc halbiret, so sind in den rechtwinklichten Dreyecken abe, ebc die Hypotenusen qb, bc und die Katheten ae, ec bekannt, man findet daher die Winkel a und c aus den Proportionen:

ab : ae = Sin. tot. : cosin. a
bc : ec = Sin. tot. : cosin. c

nach (15. II.), folglich auch $<b$ im Dreyeck abc bekannt.

Beyspiel. $ab = 150'$, $bc = 100$, $ac = 200'$

$200 : 250 = 50 : ag$

$4 : 5 = 50 : ag = 62,5$

$gc = ac - ag = 137,5$

$ec = ge = \frac{1}{2}gc = 68,75$

$ae = ge + ag = 131,25$

$150 : 131,25 = \text{Sin. tot.} : \text{cosin. } a$

log. Sin. tot. = 10.0000000

log. 131,25 = 2.1180993

12.1180993

log. 150 = 2.1760913

log. cosin. $a = 28° 57'$ = 9.9420080

$100 : 68,75 = \text{Sin. tot.} : \text{cosin. } c$

log. Sin. tot. = 10.0000000

log. 68,75 = 1.8372727

11.8372727

log. 100 = 2.0000000

log. cosin. $c = 46° 34'$ = 9.837272727

$46° 34'$
$28° 57'$
$75° 31'$
$179° 60'$
$104° 29' = b$

29) Anmerkung. Die Sätze 20. 25. 28. sind hinreichend alle Dreyecke aufzulösen, wie folgendermaßen erhellet. In Dreyecken, worinn so viel gegeben ist, daß dadurch die Dreyecke bestimmt sind, sind entweder

1) eine Seite und 2 Winkel (20. Satz.)
oder 2) zwey Seiten und ein Winkel
a) der Winkel gegenüberstehend (20. Satz.)
b) der Winkel eingeschlossen (25. Satz.)
3) drey Seiten gegeben. (28. Satz.)

Die Anwendung des 28ten Satzes kommt seltener vor, desto häufiger die Anwendung der Sätze 20. und 25. Das Folgende enthält noch einige Beyspiele hiervon.

30) Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel den Inhalt eines Dreyecks zu finden, ohne seine Höhe zu messen.

Man fälle ein Perpendikel von einer der gegebenen Seiten ab Fig. 11. auf die andere ac, so ist in dem rechtwinklichten Dreyeck abe die Hypotenuse und ein spitziger Winkel gegeben, also der Kathet be, oder die gesuchte Höhe des Dreyecks abc durch die Proportion

$$\text{Sin. tot.} : \text{Sin. a} = \text{ab} : \text{be}$$

giebt $\text{be} = \frac{\text{Sin. a} \cdot \text{ab}}{\text{Sin. tot.}}$, woraus sich der Inhalt des Dreyecks findet, wenn man mit ac multipliciret und durch 2 dividiret, oder Inhalt $\text{abc} = \frac{\text{Sin a} \cdot \text{ab} \cdot \text{ac}}{2 \cdot \text{Sin. tot.}}$

Dieser Ausdruck heißt in Worten: man multiplicire die beyden gegebenen Seiten mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, und dividire das Produkt durch den doppelten Sinus totus. Die Rechnung kann leicht und genau durch Logarithmen geführt werden. Ich wähle zum Beyspiel die Zahlen des 28ten Satzes:

log. 150 = 2.1760913
log. 200 = 2.3010300
log. Sin. 28° 57′ = 9.6848868
14.1620081
log. 2 = 0.3010300
log. Sin. tot. = 10.0000000
Unterschied = 3.8609781

Dieser Logarithme gehört zu 7261, welche Zahl den Inhalt des Dreyecks in dem Quadratmaaß angiebt, in welchem Längenmaaß die Seiten sind gemessen worden, also hier Quadratfuß.

31) Aufgabe. Die Entfernung zweyer Orte zu berechnen, zu deren keinem man unmittelbar kommen kann. Man wähle eine Standlinie cd Fig. 12, welche man bequem messen kann, und so liegt, daß sie mit den beyden Orten keine zu spitze noch zu stumpfe Winkel bildet; am besten zwischen den beyden Orten a und b, oder parallel mit ihnen. Man messe die Winkel dcb, dca; cda, cdb, so kann man vermittelst (20) in den Dreyecken cda, cdb, ca, cb berechnen, folglich in dem Dreyeck cab vermöge (25) die Winkel bey a und b, und vermöge (20) die dritte Seite ab, als die gesuchte Entfernung.

Beyspiel: cd = 1000 Fuß < dcb = 30°, dca = 35 , cdb = 42°, cda = 38°. Dieß giebt

< cdb = 180° − 30° − 42° = 108
< cad = 180° − 35° − 38° = 107°

man setze

Sin. 180° − 108° : Sin. 42 = 1000 : cb
(72°)

und

Sin. 180° − 107° : Sin. 38° = 1000 : ca
(73°)

log. 1000 = 3.0000000
log. Sin. 38° = 9.7893420
12.7893420
log. Sin. 72° = 9.9782063
log. 647,3 = cb = 2.8111357

log. 1000 = 3.0000000
log. Sin. 42° = 9.8255109
12.8255109
log. Sin. 73° = 9.9805963
log. ca = 699,7 = 2.8449146

699,7 + 647,3 : 699,7 − 647,3 =
tang. ½ b + a : tang. ½ b − a.

$\frac{180-65°}{2} = \frac{115}{2} = 57°30' = \frac{1}{2}a + b.$

log. tang. 57°30′ = 10.1958127
log. 52,4 = 1.7193313
11.9151440
log. 1347,0 = 3.1293676
log. tang. 21′ = 7.7857764

57° 51′ = b
57° 9′ = a

Sin. 57° 9′ : 699,7 = Sin. 65° : ab

log. Sin. 65° = 9.9572757
log. 699,7 = 2.8449146
12.8021903
log. Sin. 57° 9′ = 9.9243277
log. ab = 754,8 = 2.8778626

32) **Anmerkung.** Durch Wiederholung der vorstehenden Aufgabe lassen sich nach Geom. (105.) so viel Puncte einer Gegend als man will trigonometrisch bestimmen, und dadurch die geometrische Aufnahme der Gegend berichtigen. Indem man jedes trigonometrisch berechnete Dreyeck als eine besondere Figur ansehen, und die darinn enthaltenen Dinge mit dem Meßtischchen oder einem andern Instrument aufnehmen und geometrisch verzeichnen kann. Alle auf solche Art einzeln aufgenommene Dreyecke können vermittelst ihrer berechneten Seiten und Winkel zu einem ganzen verbunden werden. Auf diese Weise verfertigt man geometrische Risse von ganzen Gegenden. Es ist nicht nöthig alle Puncte aus einer Standlinie bestimmen zu wollen, man kann deren mehrere messen, oder kürzer die bereits berechneten Entfernungen wie ab Fig. 12. als Standlinien ansehen, und daraus wieder andere Entfernungen von a und b u. s. w. bestimmen. Vermittelst dieses Verfahrens und einigen aus der Astronomie entlehnten Sätzen ist man selbst in Stand gesetzt worden, ganze Grade des Erdmeridians, und vermittelst mehrerer solchen Grade die Gestalt und Größe der Erde zu berechnen.

Die Buchstabenrechenkunst.

1) Erklärung. Stetige sowohl als unstetige Größen im Allgemeinen zu bezeichnen, bedienet man sich seit Carte sens Zeiten der Buchstaben. Ein Buchstaben allein hingesetzt, z. B. a bestimmt gar nichts; man kann sich darunter jede Zahl, jeden Körper, jede Fläche, jede Linie denken. Erst dadurch, daß man zwey oder mehr Buchstaben durch die schon bekannten arithmetischen Zeichen mit einander verbindet, oder mit andern Worten, daß man gewisse Verhältnisse zwischen zwey oder mehr Größen angiebt, erhält ein solcher Ausdruck in Buchstaben einen mathematischen Sinn. So sind z. B. $a + b = S$ der allgemeine Ausdruck für jede Summe, $c - e = D$ der allgemeine Ausdruck für jeden Unterschied, $f \cdot g = P$ der allgemeine Ausdruck für jedes Produkt, $h : i = Q$ der allgemeine Ausdruck für jeden Quotienten, $\sqrt[m]{a} = r$ der allgemeine Ausdruck für jede Wurzelgröße, $a^n = p$ der allgemeine Ausdruck für jede Potenz u. dgl. mehr. Der Kürze wegen läßt man bey Buchstaben das Multiplicationszeichen ganz weg, und schreibt sie gerade neben einander, wenn man andeuten will, daß die Größen, welche sie vorstellen, in einander multiplicirt werden sollen. Z. B. $fg = P$ heißt eben so viel als $f \cdot g = P$, oder $3\,g\,h = 3 \cdot g : h$. Bey bloßen Ziffern findet diese Bezeichnungsart der Multiplication nicht statt, weil sie einen Werth von ihrer Stelle erhalten.

2) Anmerkung. Ungeachtet man nach (1) unter jedem Buchstaben sich jede beliebige Größe vorstellen kann, so giebt der gesunde Menschenverstand, daß wenn man einem Buchstaben einmal irgend eine Bestimmung gegeben hat, man ihm nun keine andere beylegen darf,

die der vorhergehenden widerspricht. Z. B. wenn $a + b = S$ ist, so kann nicht $a - b = S$ seyn, weil sonst $a + b = a - b$, das ist, die Summe zweyer Größen ihrer Differenz gleich seyn müßte, welches unmöglich ist, ausgenommen, wenn die beyden Größen $= o$, also im Grunde keine Größen mehr sind, oder wenn a und b das einemal was anders bedeuteten als das anderemal, welches nicht seyn darf, weil sonst ein Ausdruck in Buchstaben so viel als gar nichts sagte.

Man muß sich daher in mathematischen Rechnungen unter einerley Buchstaben einerley Größe, wenn gleich nicht gerade eine bestimmte Größe, denken.

Hierbey beobachtet man die willkührliche Regel, daß man die bekannten Größen durch die ersten Buchstaben, die unbekannten Größen durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

3) Erklärung. Größen, welche durch die Zeichen + oder — mit einander verbunden sind, heißen die Glieder des Ausdrucks, oder der Gleichung, wenn zwey Ausdrücke derselben Größe durch das Gleichheitszeichen verbunden sind. Z. B. $3a + 4b = 6c - 2d$. Hier sind $3a$, $4b$ Glieder des einen, $6c$, $2d$ Glieder des andern Ausdrucks. Die beiden gleichen Ausdrücke nennt man auch die beiden Seiten der Gleichung.

Zusammengesetzte Ausdrücke nennt man solche, wo mehrere Glieder mit einem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt, oder dividiret, aus mehreren Gliedern eine gemeinschaftliche Wurzel gezogen, oder mehrere Glieder zu einer Potenz erhoben werden sollen. Man schließet die zusammengesetzten Ausdrücke in eine Parenthese ein

1) $(3a + 4b) \cdot 7$
2) $(6c - 5d) : 2$
3) $\sqrt{(2a - 4c)}$
4) $(7d - 5e + 2f)^3$

1) heißt die Summe von $3a + 4b$ soll 7mal genommen werden.

2) Die Differenz von $bc - 5d$ soll durch 2 dividiret werden.

3) Aus der Differenz $2a - 4c$ soll die Quadratwurzel gezogen werden.

4) Der ganze Ausdruck soll zur dritten Potenz erhoben werden.

4) Anmerkung. Da die Buchstaben nur allgemeine Ausdrücke der Größen sind, so lassen sich die arithmetischen Operationen, welche mit ihnen vorgenommen werden sollen, nur durch Zeichen andeuten, und die Buchstabenrechenkunst lehret, wie man dieß auf eine leichte und sichere Art bewerkstelligen solle. Hierzu dienet die nachfolgende Lehre von den entgegengesetzten Größen.

5) Erklärung. Die Größen im Allgemeinen lassen sich in einer doppelten Hinsicht betrachten, entweder als solche, welche zu einander gesetzt einander vermehren (gleichartige Größen), oder solche, welche zu einander gesetzt einander vermindern (entgegengesetzte Größen); z. B. Vermögen und Schulden, Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen, Ausgab und Einnahm sind lauter Bestimmungen, wodurch die Größen einander entgegengesetzt werden.

Die gemeine Arithmetik betrachtet gewöhnlich die Größen als gleichartig, die allgemeine Rechenkunst hat es auch mit entgegengesetzten Größen zu thun.

6) Erklärung. Von den entgegengesetzten Größen nennt man die einen bejahte, die andern verneinte Größen. Es ist gleichviel, welche man bejaht nennen will. Z. B. Vermögen bejaht, Schulden verneint, Einnahm bejaht, Ausgab verneint, Vorwärts gehen bejaht, Rückwärts gehen verneint. Die bejahten

Größen bezeichnet man mit + die verneinten mit —. Wenn eine bejahte Größe allein oder vornen steht, so schreibt man sie ohne Zeichen.

7) **Anmerkung.** Man hat zur Bezeichnung der entgegesetzten Größen die Zeichen + — ganz schicklich gewählet, weil Addition und Subtraction eben so einander entgegesetzt sind, wie die Größen; denn entgegengesetzte Größen zusammenzählen, ist eben so viel, als gleichartige abziehen. Es ist einerley, ob man die Ausgabe vermehret, oder die Einnahme vermindert, ob man Schulden erhält, oder Vermögen verlieret.

8) **Satz.** Gleiche entgegengesetzte Größen heben sich einander auf, und geben zusammen o. Denn da sie einander wechselseitig vermindern, so heben sie sich auf, wenn sie gleich sind. 3 Thaler Schulden und 3 Thaler Vermögen sind zusammen = o.

Ueberhaupt + a — a = o

Hieraus fließet folgende Regel für die Addition mit entgegengesetzten Größen.

9) **Aufgabe.** Entgegengesetzte Größen zu addiren. Man schreibe die Größen, welche mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, unter einander, rechne die bejahten und die verneinten Größen zusammen, nehme die einen von den andern weg, und schreibe vor das was übrig bleibt das Zeichen des Größeren.

Beyspiele

	3a	—	4b	+	2c	
	2a	+	3b	—	5c	
Summe	5a	—	b	—	3c	
			2c	+	3d	— 4b
			3c	—	2d	— 3b
	—		5c	+	4d	+ 2b
			o	+	5d	— 5b

10) Satz. Eine Größe abziehen heißt die ihr entgegengesetzte addiren. Denn das Entgegengesetzte hinzuthun, heißt das Gleichartige vermindern (7). Von $+4+2$ wegnehmen, ist so viel als -2 zusetzen, welches wohl niemand läugnet; von $+4-2$ wegnehmen, ist so viel als $+2$ zusetzen. Das letzte könnte Anfängern parador scheinen, aber ist es nicht einerley, wenn jemand 4 Vermögen und 2 Schulden hat, ob man ihm die 2 Schulden bezahlet, oder 2 Vermögen giebt?

Hieraus fließet folgende Vorschrift für die Subtraction mit entgegengesetzten Größen: man kehre die Zeichen des Subtrahends um, und addire nach dieser Verwandlung.

11) Aufgabe. Ausdrücke in allgemeinen Zeichen von einander zu subtrahiren. Man schreibe die mit einerlei Buchstaben bezeichnete Größen untereinander, verwandle die Zeichen des Subtrahends in die entgegengesetzten und addire nach (9).

Beyspiel

$$(5d - 2a + b) - (3d + 6a - 3b)$$

giebt

$$\begin{array}{r} 5d - 2a + b \\ -3d - 6a + 3b \\ \hline 2d - 8a + 4b \end{array}$$

12) Erklärung. Eine Größe bejaht nehmen, heißt die Größe selbst ein oder etlichemal nehmen. Eine Größe verneint nehmen, heißt das ihr Entgegengesetzte ein- oder etlichemal nehmen. Größen mit einander multipliciren, heißt im Allgemeinen die eine Größe (den Multiplicand) so vielmal und in der Beziehung nehmen, wie es die andere Größe (der Multiplicator) anzeigt. Hieraus fließet folgende Vorschrift für die Multiplication mit entgegengesetzten Größen: man multiplicire die

Größen

Größen auf die gewöhnliche Weise, und gebe dem Produkt, wenn die Factoren gleiche Zeichen haben, das Zeichen +, wenn sie ungleiche Zeichen haben — Es können überhaupt vier Fälle statt finden:

1) Eine bejahte Größe durch eine bejahte zu multipliciren: hier wird die bejahte Größe wirklich etlichemal genommen, und folglich ein bejahtes Produkt

$$+4 \cdot +5 = +20$$

2) Eine bejahte Größe durch eine verneinte multipliciren, heißt die bejahte Größe so vielmal verneint nehmen, als der Multiplicator Einheiten enthält, folglich ist das Produkt verneint

$$+4 \cdot -5 = -20.$$

3) Eine verneinte Größe durch eine bejahte zu multipliciren. Hier soll die verneinte Größe wirklich so vielmal genommen werden, als der bejahte Factor Einheiten enthält, folglich ist das Produkt verneint.

$$-4 \cdot +5 = -20.$$

4) Eine verneinte Größe durch eine verneinte multipliciren, heißt die verneinte Größe verneint (das ist ihr Entgegengesetztes, das Bejahte) so vielmal nehmen, als der verneinte Factor Einheiten hat, folglich ist das Produkt bejaht.

$$-4 \cdot -5 = +20.$$

13) Aufgabe. Größen, welche in allgemeinen Zeichen ausgedruckt sind mit einander zu multipliciren.

Man schreibe den Multiplicator unter den Multiplicand, und multiplicire alle Theile des letztern mit jedem Theil des erstern, und bestimme die Zeichen nach (12). Die so erhaltene einzelnen Produkte nach 9 addiret geben das gesuchte Produkt.

10) Satz. Eine Größe abziehen heißt die ihr entgegengesetzte addiren. Denn das Entgegengesetzte hinzuthun, heißt das Gleichartige vermindern (7). Von $+4+2$ wegnehmen, ist so viel als -2 zusetzen, welches wohl niemand läugnet; von $+4-2$ wegnehmen, ist so viel als $+2$ zusetzen. Das letzte könnte Anfängern paradox scheinen, aber ist es nicht einerley, wenn jemand 4 Vermögen und 2 Schulden hat, ob man ihm die 2 Schulden bezahlet, oder 2 Vermögen giebt?

Hieraus fließet folgende Vorschrift für die Subtraction mit entgegengesetzten Größen: man kehre die Zeichen des Subtrahends um, und addire nach dieser Verwandlung.

11) Aufgabe. Ausdrücke in allgemeinen Zeichen von einander zu subtrahiren. Man schreibe die mit einerlei Buchstaben bezeichnete Größen untereinander, verwandle die Zeichen des Subtrahends in die entgegengesetzten und addire nach (9).

Beyspiel

$$(5d - 2a + b) - (3d + 6a - 3b)$$

giebt

$$\begin{array}{r} 5d - 2a + b \\ -3d - 6a + 3b \\ \hline 2d - 8a + 4b \end{array}$$

12) Erklärung. Eine Größe bejaht nehmen, heißt die Größe selbst ein oder etlichemal nehmen. Eine Größe verneint nehmen, heißt das ihr Entgegengesetzte ein- oder etlichemal nehmen. Größen mit einander multipliciren, heißt im Allgemeinen die eine Größe (den Multiplicand) so vielmal und in der Beziehung nehmen, wie es die andere Größe (der Multiplicator) anzeigt. Hieraus fließet folgende Vorschrift für die Multiplication mit entgegengesetzten Größen: man multiplicire die

Größen

Größen auf die gewöhnliche Weise, und gebe dem Produkt, wenn die Factoren gleiche Zeichen haben, das Zeichen +, wenn sie ungleiche Zeichen haben — Es können überhaupt vier Fälle statt finden:

1) Eine bejahte Größe durch eine bejahte zu multipliciren: hier wird die bejahte Größe wirklich etlichemal genommen, und folglich ein bejahtes Produkt

$$+4 \cdot +5 = +20$$

2) Eine bejahte Größe durch eine verneinte multipliciren, heißt die bejahte Größe so vielmal verneint nehmen, als der Multiplicator Einheiten enthält, folglich ist das Produkt verneint

$$+4 \cdot -5 = -20.$$

3) Eine verneinte Größe durch eine bejahte zu multipliciren. Hier soll die verneinte Größe wirklich so vielmal genommen werden, als der bejahte Factor Einheiten enthält, folglich ist das Produkt verneint.

$$-4 \cdot +5 = -20.$$

4) Eine verneinte Größe durch eine verneinte multipliciren, heißt die verneinte Größe verneint (das ist ihr Entgegengesetztes, das Bejahte) so vielmal nehmen, als der verneinte Factor Einheiten hat, folglich ist das Produkt bejaht.

$$-4 \cdot -5 = +20.$$

13) Aufgabe. Größen, welche in allgemeinen Zeichen ausgedruckt sind mit einander zu multipliciren.

Man schreibe den Multiplicator unter den Multiplicand, und multiplicire alle Theile des letztern mit jedem Theil des erstern, und bestimme die Zeichen nach (12). Die so erhaltene einzelnen Produkte nach 9 addiret geben das gesuchte Produkt.

Beyspiele:

$$\begin{array}{l} a + b = S \\ a - b = D \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 * - b^2 = SD \end{array}$$

Dieser Satz mit Worten ausgedrückt heißt: die Summe zweyer Größen multiplicirt mit der Differenz der beiden Größen, giebt die Differenz ihrer Quadrate

z. E. a sey $= 8$ $b = 4$

$$\begin{array}{l} 8 + 4 = 12 \\ 8 - 4 = 4 \\ \hline 4 \cdot 12 = 48 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ \hline a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = (a+b)^4 \end{array}$$

u. s. w. können durch die Multiplication alle Potenzen einer zweytheiligen Größe (des Binomiums) gefunden werden.

Wenn man die Exponenten der Potenzen von a und b in den verschiedenen Gliedern derselben Potenz des Binomiums unter einander vergleicht, so erhellet,

daß die Exponenten von a eben so abnehmen, als sie von b zunehmen. Z. B. in der 4ten Potenz

$$a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a$$
$$b \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4$$

Man nennt solche Ausdrücke in der Buchstabenrechenkunst **geordnete**, und zwar **fallend**, wenn die Exponenten der Potenzen derselben Größe in den folgenden Gliedern immer kleiner werden, **steigend**, wenn sie größer werden.

Hier sind die Ausdrücke zugleich nach a in fallender und nach b in steigender Reihe geordnet. Fehlet eine Potenz in der Reihe der Exponenten, so bezeichnet man die Stelle mit einem *. Z. B. im ersten Exempel fehlet der Exponent 1 von a und b in demselben Glied des Ausdrucks. (Die Zahlen, welche in die Potenzen der Glieder des Binomiums multipliciret sind (man heißt sie Coefficienten), sind ebenfalls durch die Exponenten der zugehörigen Potenzen bestimmt. Z. B. in der 4ten Potenz folgen sie in nachstehender Ordnung

Potenzen $a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a$
$\qquad b \quad b^2 \quad b^3 \qquad b^4$

Coefficienten $\left\{1, \frac{4}{1}, \frac{4\cdot(4-1)}{1\cdot 2}, \frac{4\cdot(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{4\cdot(4-1)(4-2)(4-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$

$\qquad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

Wäre dieß Gesetz allgemein (wie erwiesen werden kann daß es ist) so würde man jede unbestimmte Potenz = m von a + b durch folgenden Ausdruck finden

$$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}\,b + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\,a^{m-2}\,b^2$$
$$+ \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{m-3}\,b^3 - - - - - - + b^m$$

14) **Anmerkung.** Der aus dem 2ten Beyspiel 13 gefolgerte allgemeine Satz heißt in der höhern Rechenkunst der **Binomische Lehrsatz**. Newton ist der

Erfinder davon. Der allgemeine Beweis desselben läßt sich nach Kästner Analysis endlicher Größen, ohne etwas weiter als Multiplication in allgemeinen Zeichen vorauszusetzen, darthun. Nur hier würde die Rechnung weitläuftig fallen. Anfänger können sich befriedigen, daß sie die Wahrheit desselben an einzelnen Beyspielen sehen, wenn sie für m nach der Reihe die Zahlen 2. 3. 4. u. s. w. schreiben. Ueberhaupt ist es gut, wichtige mathematische Lehrsätze vorläufig historisch zu kennen. Der Anfänger übernimmt, wenn er den Nutzen derselben eingesehen hat, um so eher die Mühe ihren Grund nach der strengeren Theorie zu studiren. Vermittelst des binomischen Lehrsatzes lassen sich Wurzeln von allen Graden auf ähnliche Weise ausziehen, wie nach den beiden ersten Potenzen Arithmet. 4 Abschnit die Ausziehung der Quadrat und Cubikwurzel ist gelehret worden.

15. Erklärung. Größen in einander dividiren heißt finden, wie die eine in der andern enthalten ist. Daher geben bey der Division mit entgegengesetzten Größen gleiche Zeichen + ungleiche Zeichen — für den Quotienten. Es finden hier wie bey der Multiplication mit entgegengesetzten Größen 4 Fälle statt.

1) Eine bejahte Größe durch eine bejahte zu dividiren; hier wird der Quotient bejaht, weil der Divisor wirklich in dem Dividend etlichemal oder zum Theil enthalten ist

$$+ 20 : + 5 = + 4.$$

2) Eine bejahte Größe durch eine verneinte zu dividiren, hier wird der Quotient verneint, weil der Divisor nicht selbst, sondern sein Entgegengesetztes in dem Dividend enthalten ist

$$+ 20 : - 5 = - 4$$

Denn $- 4 \cdot - 5 = + 20.$

3) Eine verneinte Größe durch eine bejahte zu dividiren giebt einen verneinten Quotienten, denn der bejahte Divisor ist nicht selbst, sondern sein entgegengesetztes in dem verneinten Dividenten enthalten

$$-20 : +5 = -4$$
$$\text{weil } +5 \cdot -4 = -20$$

4) Eine verneinte Größe durch eine verneinte zu dividiren, giebt einen bejahten Quotienten, weil der verneinte Divisor wirklich in dem verneinten Dividenden enthalten ist.

$$-20 : -5 = +4$$
$$\text{denn } -5 \cdot +4 = -20.$$

16) **Aufgabe.** Die Division in allgemeinen Zeichen zu verrichten. Wenn der Divisor ein einfacher Ausdruck ist, so zeichne man die Division nur an, und streiche, wenn der Divisor mit dem Dividenden oder einzelnen Gliedern desselben gemeinschaftliche Factoren hat, diese gegen einander weg.

Beyspiel:

$$\frac{6ab - 3cd + 4fg}{2bg} = \frac{6ab}{2bg} - \frac{3cd}{2bg} + \frac{4fg}{2bg} =$$
$$= \frac{3a}{g} - \frac{3cd}{2bg} + \frac{2f}{b}$$

Wenn der Divisor und Dividend zusammengesetzte Ausdrücke sind, so ordne man die Glieder in beyden nach einerley Buchstaben (gewöhnlich nach dem, welcher die höchsten Potenzen enthält), dividire mit dem ersten Glied des Divisors in das erste Glied des Dividenden, in dem man die Größe sucht, welche mit dem ersten Glied des Divisors multiplicirt das erste Glied des Dividenden giebt; mit dem so gefundenen Quotien-

ten multiplicire man alle Glieder des Divisors nach (13), und ziehe sie vom Dividenden ab nach (11). Bleibt ein Rest, so verfährt man mit dem ersten Glied desselsen wie vorher.

Beyspiel: $(a+b)^4 : (a+b)^2$ giebt Divisor und Dividend ausgerechnet und nach a geordnet nach (15):

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \;(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)\; a^2+2ab+b^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad : \quad : \quad \text{Quotient} \\ \qquad\qquad\quad a^4+2a^3b+\;a^2b^2 \quad : \quad : \\ \qquad\qquad\quad \overline{\;\;\;

Beyspiel:

$$\frac{1}{a-1} = a-1 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1-\frac{1}{a}} \\ \quad \frac{1}{a} \\ \quad + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \\ \quad\quad + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} \\ \quad\quad\quad + \frac{1}{a^3} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \ldots\ldots \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Hier geht die Division ohne Ende fort.

Man erhält den Quotienten nach den drey gefundenen Gliedern der Reihe vollkommen, wenn man den Bruch $\frac{\frac{1}{a^3}}{a-1} = \frac{1}{a^3(a-1)}$ hinzusetzt.

Es sey $a = 2$, so verwandelt sich der allgemeine Ausdruck $\frac{1}{a-1}$ in den Bruch $\frac{1}{2-1} = 1$, welcher Ausdruck durch die Reihe ohne Ende $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots\ldots$ dargestellt werden kann. Dieser Ausdruck nähert sich nämlich seinem wahren Werth $= 1$ immer mehr, je weiter man die Reihe fortsetzt, weil die folgenden Glieder immer kleiner werden, er erreicht indessen diesen Werth nie, weil jederzeit noch ein Bruch fehlet. Nach dem dritten Glied ist der fehlende Bruch $\frac{1}{a^3(a-1}$ hier $= \frac{1}{8(2-1)} = \frac{1}{8}$, so groß als das letzte Glied. Dieß erhellet auch aus der Summirung der Glieder des Quotienten, welche eine fallende geometrische Reihe ausmachen (Arithm. 130.). Eine Reihe entfernt sich von ihrem wahren Werthe, wenn die folgenden Glieder immer größer werden. Alsdann wird der Bruch, wel-

chen man als die Ergänzung zu dem Quotienten setzen muß, immer größer.

Beyspiel:

$$\frac{A}{1+a} = 1 + a \;(a)\; a + a^2 + a^3 \ldots\ldots$$

$$\begin{array}{r} a + a^2 \\ \hline ,, \; - a^2 \\ \quad - a^2 - a^3 \\ \hline ,, \; + a^3 \\ \quad + a^3 + a^4 \\ \hline ,, \; - a^4 \end{array}$$

Wenn hier a eine ganze Zahl größer als 1 ist, so werden die folgenden Glieder des Quotienten und der Rest immer größer, und die Reihe entfernt sich. In solchen Fällen ist es bequemer, den Quotienten in seiner ursprünglichen Form zu lassen.

Rechnung mit Potenzen und Wurzelgrößen.

18) Satz. Potenzen von einer Größe mit einander zu multipliciren, darf man nur ihre Exponenten addiren. Denn $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = a^5 = a^{2+3}$, überhaupt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

19) Satz. Potenzen von einer Größe mit einander zu dividiren, ziehe man ihre Exponenten von einander ab. Denn

$$a^7 : a^3 = \frac{aaaaaaa}{aaa} = aaaa = a^4 = a^{7-3}$$

überhaupt $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Hieraus folgt, daß jede Größe in der Potenz 0 so viel als 1 ist, und Potenzen mit verneinten Exponenten Brüche sind, deren Zähler 1 und der Nenner die bejahte Potenz von demselben Exponenten ist.

Denn $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$, weil jede Größe durch sich selbst dividiret 1 giebt.

Ferner $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ weil

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

20) Satz. Eine Potenz zu einer andern erheben multiplicire man die Exponenten miteinander:

$(a^2)^3 = a^2 . a^2 . a^2 . = a^{2+2+2} = a^{3.2}$

überhaupt $(a^m)^n = a^{m.n}$.

21) Satz. Jede Wurzelgröße läßt sich als eine Potenz ansehen, deren Exponent ein Bruch ist, dessen Zähler der Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen, und dessen Nenner der Exponent des Wurzelzeichens ist.

Z. B. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, denn $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ und $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$, weil $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3}} . {}^3 = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$; $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}}$, denn $(\sqrt{a^4})^2 = a^4$ und $(a^{\frac{4}{2}})^2$ ebenfalls $a^4 = a^{2 . \frac{4}{2}}$. Ueberhaupt $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ und $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

22) Satz. Wurzeln verschiedener Exponenten von einerley Größe mit einander zu multipliciren, verwandle man sie in Potenzen von gebrochenen Exponenten, und verrichte die Multiplication nach (18.), wobey man die gebrochenen Exponenten nach Arithm. (54.) unter eine Benennung bringt.

Z. B. $\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} . a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} =$

$a^{\frac{n}{mn} + \frac{m}{mn}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$ oder $\sqrt[3]{b} . \sqrt{b}$

$= b^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2+3}{3.2}} = b^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{b^5}$.

Beziehen sich die Wurzeln auf verschiedene Größen, so zeigt man die Multiplication bloß an.

Z. B. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, oder $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{9}$.

23) Satz. Wenn man eine Wurzel aus einem Produkt ziehen soll, so heißt dieß so viel als die Wurzel aus jedem Factor des Produktes ziehen.

Z. B. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, denn $(\sqrt[3]{ab})^3 = ab$ und $(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} = (\sqrt[3]{a})^3 \cdot (\sqrt[3]{b})^3 = ab$. Hierdurch kann man irrationale Wurzeln bequemer ausdrücken, wenn sie rationale Factoren haben.

Z. B. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{48} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt{3}$.

24) Satz. Wurzeln verschiedener Exponenten von einerley Größe in einander zu dividiren. Man verwandle die Wurzelgrößen in Potenzen von gebrochenen Exponenten, und verrichte die Division nach 19, indem man die Exponenten auf einerley Benennung bringt. Gleiche Factoren im Divisor und Dividend streichen sich gegen einander weg:

$$\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{b}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = b^{\frac{2-3}{2 \cdot 3}} = b^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[6]{b}.$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

Bey Wurzeln von verschiedenen Größen zeigt man die Division bloß an.

Z. B. $\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[n]{a}}$.

25) Satz. Wurzeln von geraden Exponenten aus verneinten Größen sind unmöglich. Z. B. $\sqrt{-a^2}$. Denn die Wurzel dieser Größe quadriret, müßte $-a^2$ geben; nun giebt aber sowohl $+a$ als $-a$ mit sich selbst multipliciret $+a^2$, folglich läßt sich die Quadratwurzel von $-a^2$ gar nicht denken.

Auf dieselbe Art wird der Beweis für jede andere Wurzel eines geraden Exponenten von einer verneinten Größe geführet.

26) Anmerkung. Solche unmögliche Größen kommen in der höhern Rechenkunst häufig vor, und dürfen nicht ausser Acht gelassen werden.

Wenn die Auflösung einer Aufgabe auf lauter unmögliche Größen führet, so zeigt dieß an, daß die Forderung etwas unmögliches enthielt.

27) Anmerkung. Das Vorstehende wird schon hinreichen, den Anfängern in einigen Beyspielen den Nutzen zu zeigen, welchen die Buchstabenrechenkunst in Erforschung mathematischer Wahrheiten gewähret, und zugleich Gelegenheit geben, an einigen leichten Fällen die Methode: aus bekannten Eigenschaften unbekannter Größen die unbekannten Größen durch Gleichungen zu finden, welche man die mathematische Analysin nennt, zu erläutern, wenn gleich der Inbegriff dieser Wissenschaft nicht für den Zweck dieses Lehrbuches gehöret.

Anwendnng der Buchstabenrechenkunst auf einige arithmetische Wahrheiten.

28) **Satz.** Einen allgemeinen Ausdruck für jedes Zahlensystem anzugeben.

$$hx^{+n} \ldots dx^{+3}, cx^{+2}, bx^{+1}, ax^{0}, bx^{-1}, cx^{-2}, dx^{-3}.$$

Hier kann x jede ganze Zahl bedeuten, welche auf verschiedene Potenzen erhoben, die verschiedenen Ordnungen des Zahlensystems geben; die Buchstaben a, b, c, d bedeuten die Einheiten. Man setze z. B. $x = 2$, so erhält man die Diadik $x = 4$, die Tetractik $x = 10$, das Decimalsystem oder Decadik, $x = 12$ das Duodecimalsystem die Dodecadik, $x = 60$ das Sexagesimalsystem u. s. w. Unter allen hat das Decimalsystem den Vortheil, daß es die Reduction einer Ordnung in die andere erspart. Zur Vergleichung mögen einige Beyspiele aus der Tetractik dienen. Die römischen Ziffern sollen darinn die verschiedenen Einheiten (man hat nur drey nöthig) und * das Stellenzeichen bedeuten:

$d4^3\ c4^2\ b4'\ a4^0\ b4^{-1}\ c4^{-2}\ d4^{-3} \ldots$
oder
$d.64\ c.16\ b.4\ a.1\ b.\frac{1}{4}\ c.\frac{1}{16}\ d.\frac{1}{64} \ldots$
} Tetractik

I	II*	III**	*, ** III	nach der Tetractik
1	8	48	$\frac{3}{64}$	nach der Decadik.

Sehr große Zahlen kurz zu bezeichnen, bedienet man sich auch in dem Decimalsystem zuweilen der Ordnungen. Z. B. $6 \cdot 10^6$ oder kürzer 6^{VI} (wo die römische Ziffer die Potenz der 10 oder die Ordnung bedeutet) heißt so viel als 6 Millionen, $3 \cdot 10^{-12}$, oder 3^{-XII} 3 Billiontheil. Auch lassen sich aus der Decadik leicht die allgemeinen Beweise für die Multiplication und Di-

vision der Decimalbrüche herleiten, welche in der Arithmetik an einzelnen Beyspielen erläutert worden sind.

$$a \cdot 10^{-3} \cdot b \cdot 10^{-4} = ab \cdot 10^{-3-4} = ab \cdot 10^{-7}$$

das ist, man summire die Ordnungen der Factoren, um die Ordnung des Produkts zu erhalten.

$$a \cdot 10^{-6} : b\,10^{-4} = \frac{a}{b} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-4}} = \frac{a}{b} 10^{-6+4},$$

$$= \frac{a}{b} 10^{-6+4},$$

oder man ziehe die Ordnung des Divisors von der Ordnung des Dividenden ab, um die Ordnung des Quotienten zu erhalten.

Beyspiel:

$$7325 \cdot 10^{-3} : 846 \cdot 10^{-3} = \frac{7325}{846} \cdot 10^{-3+3} =$$

$\frac{7325}{846} \cdot 10^{0} = \frac{7325}{846}$. Man vergleiche damit das Verfahren Arithmetik 67.

29) Satz. m bedeute unbestimmt jede ganze Zahl, so ist $2m$ der allgemeine Ausdruck für jede gerade Zahl, $2m \pm 1$ der allgemeine Ausdruck für jede ungerade Zahl, denn m mag gerade oder ungerade seyn, so ist $2m$ durch 2 theilbar, also gerade, daher der andere Ausdruck ungerade, weil jeder geraden Zahl eine ungerade vorhergeht, und folgt. Z. B.

$m = 1$, $2m = 2$, $2m + 1 = 3$, $2m - 1 = 1$

$2m \cdot (2m + 1) = 4m^2 + 2m$

durch 2 theilbar, weil jedes Glied den Factor 2 enthält; d. i. jede ungerade Zahl mit jeder geraden multipliciret, giebt ein gerades Product.

$2m \cdot 2m = 4m^2$ gerade

$(2m+1).(2m-1) = 4m^2 + 2m - 2m - 1 = 4m^2 - 1$ ungerade, weil $4m^2$ gerade ist; oder eine ungerade Zahl durch eine ungerade multiplicirt, giebt ein ungerades Produkt. Hieraus folgt, daß

1) eine gerade Zahl durch eine ungerade sowohl, als gerade Zahl dividiret, einen geraden Quotienten giebt;

2) eine ungerade Zahl durch eine ungerade dividiret, einen ungeraden Quotienten giebt.

30) Satz. Jede Primzahl, 2 und 3 ausgenommen, läßt sich auf die Form $6m+1$ oder $6m-1$ bringen, wo m jede ganze Zahl bedeuten kann. Man setze für m nach der Reihe die Zahlen 1 2 3 .... so giebt $6m$ alle Zahlen von 6 zu 6. Z. B. 6 . 12 18 ...

Zwey nächste dieser Reihen heißen allgemein $6m$, $6(m+1)$, zwischen sie fallen 5 Zahlen, nämlich:

$$6m \quad \overset{1}{6m+1} \quad \overset{2}{6m+2} \quad \overset{3}{6m+3} \quad \overset{4}{6m+4} \quad \overset{5}{6m+5} \quad 6m+6 \text{ oder } 6(m+1)$$

die beyden äußersten sind durch 6, $6m+2$ und $6m+4$ durch 2, und $6m+3$ durch 3 theilbar, folglich bleiben keine für Primzahlen übrig als $6m+1$ und $6m+5$. Die letzte kann man auch $6(m+1)-1$ schreiben, oder $m+1 = M$ giebt für diesen Ausdruck $6M-1$. Folglich ist $6m \pm 1$ die allgemeine Form für jede Primzahl. Z. B. $m=1$ giebt 5, 7, $m=2$ giebt 11, 13 Primzahlen. Jedoch sind nicht alle Zahlen, welche die Form $6m \pm 1$ haben, Primzahlen, indem auch die Produkte und Potenzen von Primzahlen darunter begriffen sind. Z. B. $7^2 = 49 = 6m+1$ wenn $m=8$ ist.

31) Satz. Die Polygonalzahlen entstehen, wenn man die Glieder von arithmetischen Reihen, deren erstes

Glied 1 ist, summiret. Z. B. die Glieder der Reihe der natürlichen Zahlen

1 2 3 4 5 6 7 8 9 . . . .

summiret, giebt die dreyeckigten oder Trigonalzahlen.

1 3 6 10 15 21 28 36 45 . . .

die Reihe der ungeraden Zahlen.

1 3 5 7 9 11 13 . . . . .

summiret die Reihe der Quadratzahlen

1 4 9 16 25 36 49 . . . . . .

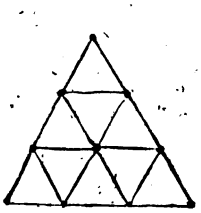
die Reihe

1 4 7 10 13 16 . . . . . .

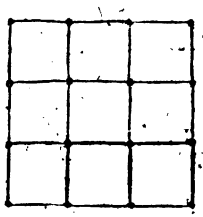
summiret die Reihe der fünfeckigten Zahlen

1 5 12 22 35 51 . . . . . .

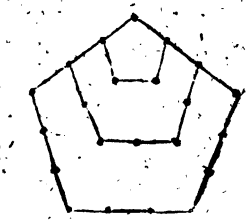
Die Polygonalzahlen haben ihren Namen daher, weil ihre Einheiten, in gleiche Entfernungen von einander gesetzt, reguläre Vielecke bilden, wie folgt:



Trigonalzahlen.



Tetragonalzahlen.



Pentagonalzahlen.

Aus der Entstehungsart der vieleckigten Zahlen erhellet, daß man sie folgendergestalt ausdrucken kann:

arithmetische Reihe

1 1+d 1+2d 1+3d 1+4d . . . 1+m−1d

Reihe der Polygonalzahlen

1 2+d 3+3d 4+6d 5+10d . . . .

Die mte Polygonalzahl, als die Summe von m Gliedern der arithmetischen Reihe ist

$$(1+1+(m-1)d) \cdot \frac{m}{2} = (2+(m-1)d)\frac{m}{2} = m + \frac{m \cdot m-1}{2} \cdot d.$$

In diesem Ausdruck darf man nur für d den bestimmten Unterschied setzen, um das mte Glied einer beliebigen Reihe von Polygonalzahlen zu finden. n heiße die Zahl der Seiten, oder (wie man kürzer sagt) die Seiten der Polygonalzahlen, so ist $n-2=d$. Denn für die dreyeckigten Zahlen ist $d = 3-2 = 1$,

für die viereckigten Zahlen

$d = 4-2 = 2$,

für die fünfeckigten

$d = 5-2 = 3$ u. s. w.

woraus die Richtigkeit des Ausdruckes $n-2=d$ erhellet. Man hat daher für die mte Polygonalzahl von n Seiten $m + \frac{m.m-1}{2} \cdot n-2$.

Beyspiel. Die 20ste dreyeckigte Zahl zu finden. Sie ist $20 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 1 = 210$

32) Anmerkung. Durch die Summirung der Polygonalzahlen erhält man die Reihe der Pyramidalzahlen.

$1, 3+d, 6+4d, 10+10d, 15+20d$---

setzt man $d = 1\ 2\ 3$ ---

so erhält man die dreyeckigten, viereckigten, fünfeckigten Pyramidalzahlen. Sie haben ihren Namen davon, weil ihre Einheiten in gleichen Entfernungen geordnet, gleichseitige Pyramiden bilden.

Wie

Wie z. B. die Kugelhaufen in Zeughäusern und auf Waffenplätzen. Daher findet diese Lehre ihre Anwendung in der Geschützkunst. Man hat Tafeln über die Pyramidalzahlen berechnet. Die allgemeine Theorie der figurirten Zahlen würde mich hier zu weit führen. Man sehe Kästners Analys. endl. Größen.

33) Satz. Die Versetzungen, welche bey einer gegebenen Anzahl von Dingen möglich sind, zu finden. Bey zwey Dingen finden nur zwey 1. 2 Versetzungen statt ab, ba: kommt hierzu das dritte Ding c, so kann dasselbe in jeder der beyden Ordnungen drey Stellen einnehmen. D. i. bey drey Dingen finden 1. 2. 3 Versetzungen statt

	ab			ba		II
abc	acb	cab	bac	bca	cba	III

Kommt hierzu das vierte Ding d, so finden sich in jeder der 6 Ordnungen von 3 Dingen 4 Stellen für das vierte. Folglich überhaupt Versetzungen 1 . 2 . 3 . 4 bey 4 Dingen 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . n bey n Dingen. Ist n = 10 so bekommt man schon 3 62800 Versetzungen.

34) Satz. Die Verbindungen nach 2, 3, 4 ... (Amben, Ternen, Quaternen u. s. w.) welche in einer gegebenen Anzahl von Größen enthalten sind, zu finden.

I. Verbindungen nach zwey, finden bey zwey Größen nur eine statt, bey drey Größen drey, bey vier Größen sechs u. s. w. wie aus folgendem Schema erhellet.

ab
ca cb
ad bd cd
ae be ce de
af bf cf df ef

Ueberhaupt so oft eine neue Größe hinzukommt, giebt sie mit jeder der vorhergehenden eine Ambe, daher ist das Gesetz der Ambe folgendes:

für zwey Größen 1 Ambe
für drey Größen $1+2$ Amben
für vier Größen $1+2+3$ Amben
für n Größen $1+2+3+4\ldots+n-1$ Amben

$$=(n-1+1)\frac{n-1}{2}=\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\text{ Amben}$$

$n=100$ giebt $\frac{100\,.\,99}{2}=4950$ Amben bey 100 Dingen.

II. Verbindungen nach drey.

Bey drey Größen findet nur eine Terne statt.

abc

Kommt hierzu die 4te Größe, so giebt sie mit jeder Ambe der drey vorhergehenden Größen eine Terne. Z. B.

abc
abd acd cbd

Ueberhaupt erhält man bey jeder hinzu kommenden Größe so viel Ternen mehr, als die vorhergehenden Größen, ohne die hinzugekommne Amben enthalten. Daher sind bey

3 Größen $1=\frac{2\,.\,2-1}{1\,.\,2}=1$ Terne

4 Größen $1+3=\frac{2\,.\,2-1}{1\,.\,2}+\frac{3\,.\,3-1}{1\,.\,2}=4$

5 Größen $1+3+6=\frac{2\,.\,2-1}{1\,.\,2}+\frac{3\,.\,3-1}{1\,.\,2}+\frac{4\,.\,4-1}{1\,.\,2}=10$

bey n Größen $=1+3+6\ldots,+\frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2}$ Ternen

Die allgemeine Summe der Amben von 1 bis zu $n - 1$ giebt die Anzahl der Ternen von n Dingen.

Sie ist $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = S$

Man setze $n = 3, 4, 5$ so erhellet die Richtigkeit aus den vorstehenden Beyspielen: angenommen die Summe S sey für n Dinge richtig, und es komme das $n + 1$ste Ding hinzu, so ist die hinzukommende Zahl von Ternen $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$ folglich die Ternen in $n + 1$ Dingen

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}.$$

Das zweyte Glied oben und unten mit 3 multipliciret giebt

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3n^2 - 3n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Dieß zu dem ersten Glied

$$= \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^2 - n \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ addiret giebt

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 3n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{n^3 - n}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$ Eben das giebt der Ausdruck

$$\frac{n + 1 \cdot n \cdot n - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Hieraus erhellet, daß die Summe S die Menge von Ternen in jeder unbestimmten Anzahl von n Dingen giebt, weil man dasselbe Gesetz für $n + 1$ Dinge erhält, und daher die Richtigkeit des Gesetzes von jeder bestimmten Anzahl von Dingen auf die um 1 größere

Anzahl ausgedehnt werden kann. Es trifft aber das Gesetz bey 3, 4 5 Dingen ein, folglich muß es auch bey 6 7 8 - - - Dingen wahr seyn.

III. Verbindungen nach vier. In jeder unbestimmten Anzahl von n Dingen ist die Zahl der Quaternen

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Dieß giebt für $n = 4$ — 1 Quaternen
$n = 5$ — 5
$n = 6$ — 15 u. s. w.

Der allgemeine Beweis hiervon wird wie bey den Ternen geführet. Denn es erhellet, daß für jedes hinzukommende Ding die Zahl der Quaternen um so viel wächset, als Ternen in den vorhergehenden Dingen ohne das hinzugekommene enthalten sind.

35) Anmerkung. Wenn man die Ausdrücke für die Verbindungen mit den Coefficienten des Binomiums vergleicht, so erhellet, daß sie mit denselben übereinstimmen, wenn man n statt m (13) schreibt. Daher hat man die Verbindungen nach 9 in n Dingen

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \cdots \cdot n-(9-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 9}$$

Beyspiel:

Wie viel Quaternen sind in 90 Zahlen?

Antwort:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 205590$$

Wie viel Quinternen sind in 10 Zahlen?

Antwort:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

Anwendung der Buchstabenrechenkunst auf geometrische Wahrheiten.

36) Satz. Jede Linie bezeichnet man durch einen Buchstaben, jede Fläche durch das Produkt zweyer Buchstaben, jeden Körper durch das Produkt dreyer Buchstaben. Man nennt daher auch die Factoren eines allgemeinen Ausdrucks Dimensionen, und sagt, ein Ausdruck habe eine, zwey, drey Dimensionen, je nachdem er aus einem, zwey, drey Factoren besteht. Ist der Ausdruck ein Quotient, so muß man die Zahl der Factoren des Nenners von der Zahl der Factoren des Zählers abziehen, um die Zahl der Dimensionen zu erhalten. Bey höheren Potenzen kommen noch mehr Dimensionen vor. Es lassen sich aber dieselben nicht als stetige Größen im Raum darstellen, wenn man sich anders nicht Produkte aus Zahlen in Körper, Flächen oder Linien darunter denkt.

Beyspiel: Die Grundlinie und Höhe eines Parallelogrammes P heißen a, b so ist $P = ab$; ist der Winkel, welchen die Seiten einschließen, ein Rechter, so ist P ein Rechteck. D. i. das Produkt zweyer Factoren ab, ist der allgemeine Ausdruck für jedes Rechteck (Geom. 123). Eben so ist abc das Produkt dreyer Factoren der allgemeine Ausdruck für jeden prismatischen Körper.

38) Satz. Den Umfang eines Quadrates und eines Rechteckes von einerlei Inhalt mit einander zu vergleichen. Der Inhalt des Rechteckes $= ab$ sein Umfang $= 2b + 2a = 2(b + a)$, der Inhalt des gleichen Quadrates $c^2 = ab$, die Seite desselben $c = \sqrt{ab}$, folglich der Umfang $= 4\sqrt{ab}$, also Umfang des Quadrates zum Umfang des Rechteckes $= 4\sqrt{ab} : 2(a + b) = 2\sqrt{ab} : a + b$. Es sey $b = na$ so verwandelt sich dieses Verhältniß in

$2\sqrt{na^2} : a + na = 2a\sqrt{n} : (n+1)a = 2\sqrt{n} : n+1$

Das letzte Glied übertrifft das erste, so bald n größer als 1 ist. Z. B. $n = 2$

giebt $2\sqrt{2} : 2+1 = 2 . 1,41 : 3 =$

$= 2,82 : 3$

$n = 4$

$2\sqrt{4} : 4+1 = 4 : 5$

$n = 9$

$2\sqrt{9} : 9+1 = 6 : 10$ u. s. w.

woraus zugleich erhellet, daß der Umfang des Rechteckes den Umfang des gleichen Quadrates desto mehr übertrifft je größer n ist, oder je ungleicher die Seiten des Rechteckes sind. Dieser Satz kann allgemeiner so ausgedrückt und erwiesen werden: jede regulaire Figur hat bey gleichem Inhalte einen kleineren Umfang als die irregulairen Figuren von gleicher Anzahl Seiten. **Der Umfang der irregulairen Figuren nimmt bey gleichem Inhalte ab, je näher ihre Gestalt der regulairen Figur kommt.**

39) Satz. Den Inhalt einer regulairen Figur durch ihren Umfang auszudrücken.

Der Inhalt der regulairen Figur ist nach Geom. (190) der Umfang multipliciret mit der halben Höhe $= \frac{1}{2}h . p = \frac{1}{2}ph$, wenn p den Umfang und h die Höhe des Vieleckes bedeutet. n bezeichne die Zahl der Seiten des regulairen Vieleckes, so ist eine Seite desselben $= \frac{p}{n}$. Die Höhe h läßt sich durch trigonometrische Auflösung des Dreyeckes acf (Fig. 116 Geom.) ebenfalls durch den Umfang ausdrücken. Man denke sich mit der halben Seite af einen Bogen von a aus beschrieben, so ist die Höhe die Tangente von a oder Cotangente von $\frac{1}{2}c$ wenn c den Centriwinkel bedeutet.

Der sin. tot. sey = 1 so hat man folgende Proportion $1 : \text{cotang } \frac{1}{2}c = \frac{1}{2n} p : h$

$$h = \frac{1}{2n} p \cdot \text{cotang } \frac{1}{2}c$$

Daher der Inhalt des regulairen Vieleckes

$$= \frac{1}{2} ph = \frac{1}{2} p \frac{1}{2n} p \text{ cotang. } \frac{1}{2}c$$

$$= \frac{1}{4n} p^2 \text{ cotang. } \frac{1}{2} c .$$

Man setze für ein anderes Vieleck, dessen Umfang jenem gleich ist, die Zahl der Seiten N, den Centriwinkel C, so ist der Inhalt dieses Vieleckes

$\frac{1}{4N} p^2$ cotang. $\frac{1}{2}$ C; beide verhalten sich zu einander

$$= \frac{\text{cotang. } \frac{1}{2} c}{n} : \frac{\text{cotang. } \frac{1}{2} C}{N}$$

Das letzte Glied ist größer als das erste, wenn $N > n$ ist. Denn die Centri- und halben Centriwinkel nehmen in demselben Verhältniß ab, in welchem die Zahl der Seiten des Vieleckes wächset, die Cotangenten dieser Winkel wachsen aber in einem zunehmenden Verhältniß, Trigonom. (5 Satz). Hieraus folgt, daß bey gleichem Umfang der regulairen Vielecke die Fläche derselben mit der Anzahl der Seiten zunimmt, und daß folglich der Kreis als die Gränze der ordentlichen Vielecke bey gleichem Umfange die größte Fläche, oder bey gleicher Fläche den kleinsten Umfang hat.

Beyspiel: $n = 3$, $N = 4$ so ist die Fläche des regulairen Dreyecks zur Fläche des regulairen Viereckes von gleichem Umfang

$$= \frac{\text{cotang. } 60°}{3} : \frac{\text{cotang. } 45°}{4} =$$

4 tang. 30° : 3 tang. 45°

Setzt man den Umfang dieser beiden Vielecke = 1000 Fuß, so wäre der Inhalt des regulairen Dreyeckes $= \frac{1}{12}$ 1000² cotang. 60° = 48112,5 Quadratfuß, der Inhalt des regulairen Viereckes $= \frac{1}{16}$ 1000² cotang. 45° = 62500□ Fuß = 250² wie gehörig.

40) Satz. Aus dem Inhalte einer regulairen Figur den Umfang zu finden. Man sehe in dem Ausdruck des vorhergehenden Paragraphs $\frac{1}{4n}$ p² cotang. $\frac{1}{2}$ c = J den Inhalt J als bekannt und p als gesucht an, so hat man

$$\frac{4nJ}{\text{cotang. } \frac{1}{2}c} = p^2$$

wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit 4 n multipliciret und durch cotang. $\frac{1}{2}$ c dividiret. (Hierbey bemerke der Anfänger folgende Regel, welche durchgehends bey Findung der unbekannten Größe in einer Gleichung angewendet wird. Man bringt die bekannten Größen, welche mit der unbekannten durch die Addition, Subtraction, Multiplication oder Division verbunden sind dadurch weg, daß man diese Größen auf der andern Seite des Gleichheitszeichens subtrahiret, addiret, dividiret oder multipliciret. Eigentlich thut man dieses auf beiden Seiten der Gleichung, wodurch die bekannten Größen auf der Seite der unbekannten Größe sich aufheben, weil die arithmetischen Operationen in der genannten Ordnung mit einerley Größe verrichtet, einander entgegen gesetzt sind, und sich aufheben.)

$$\text{also } p = \sqrt{\frac{4nJ}{\text{cotang. } \frac{1}{2}c}}$$

Die Rechnung läßt sich leicht durch Logarithmen führen.

Beyspiel: Der Inhalt des regulairen Sechseckes sey 10000 Quadratfuß, wie groß ist der Umfang desselben

log. 10000 = 4.
log. 4 . 6 = 24 = 1, 3802112
5, 3802112
log. cotang. 30° = 0, 2385606

für den Halbmesser 1. (In den Tafeln findet man diese Logarithmen mit der Kennziffer 10, diese verwandelt sich hier in 0, weil man die Cotangente der Tafeln durch den Halbmesser dividiren, also von ihrem Logarithmen den Logarithmen des Halbmessers abziehen muß Trigon. (10 Anm.)

log. p = $\frac{1}{2}$. 5, 1416506
= 2, 5708253
— p = 371,6 Fuß

Vermittelst dieses Satzes kann man jede irregulaire Figur in eine regulaire von gleicher oder beliebiger Anzahl Seiten verwandeln.

Man berechne den Inhalt der Figur, setze ihn = J und berechne p.

41) Satz. Ein Rechteck zu verzeichnen, von dem irgend ein aliquoter Theil, den ich $\frac{1}{n}$ nenne, dem Ganzen ähnlich sey. Die Grundlinie und Höhe des Rechtecks heißen b, a. Man theile b in n gleiche Theile, und ziehe mit a durch einen Theilungspunct eine Parallele, so ist, vermöge der Voraussetzung, in dem abgeschnittenen Theil und dem ganzen Rechteck

$\frac{1}{n}$ b : a = a : b

daher $\frac{1}{n}$ $b^2 = a^2$
folglich $b^2 = n a^2$
$b = \sqrt{n a^2}$
$b = a\sqrt{n}$

Man setze z. B. $a = 1$ $n = 2$, so findet man $b = \sqrt{2}$, d. i. die Seiten des Rechtecks, dessen Hälfte dem Ganzen ähnlich ist, verhalten sich $= 1 : \sqrt{2}$. Haben die Seiten eines Bogen Papiers diese Verhältniß, so wird der Bogen so oft gebrochen, als man will Formate geben, die unter sich und dem Ganzen ähnlich sind, weil das Brechen der längern Seite eine Halbirung des Bogens ist.

Wäre $n = 3$, so hätte man

$$a : b = 1 : \sqrt{3}.$$

42) Satz. Allgemeine Formeln für die trigonometrischen Linien zu finden, wenn man den Halbmesser oder Sin. tot. $= 1$ setzt. Man drücke die Sätze (Trigonom. 13. S.) in Buchstaben aus. Der unbestimmte Bogen heiße x, so hat man den Sinus $=$ Sin. x den Cosinus $= \sqrt{1^2 - \text{Sin. } x^2}$

$$\text{cosin. } x : \text{sin. } x = 1 : \text{tang. } x$$

$$\text{also} \quad \text{tang. } x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cosin. } x}$$

$$\text{Sec. } x = \sqrt{1^2 + \text{tang. } x^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + \frac{\text{sin. } x}{\text{cosin. } x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{cosin. } x^2 + \text{sin. } x^2}{\text{cosin. } x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1^2}{\text{cosin. } x^2}} = \frac{1}{\text{cosin. } x}$$

weil Sin. x^2 + cosin. $x^2 = 1$.

Der Ausdruck für die Secante fließet auch unmittelbar aus folgender Proportion:

$$\text{cosin. } x : 1 = 1 : \text{Sec. } x$$

$$\text{daher} \quad \text{Sec. } x = \frac{1}{\text{cosin. } x}$$

Für die Tangente und Cosecante hat man,

$$1 : \text{tang. } x = \text{cotang. } x : 1$$

$$\text{cotang. } x = \frac{1}{\text{tang. } x} = \frac{1}{\frac{\text{sin. } x}{\text{cosin. } x}} = \frac{\text{cosin. } x}{\text{sin. } x}$$

$$1 : \text{Sec. } x = \text{cot. } x : \text{cosec. } x$$

$$\text{cosec. } x = \frac{\text{cot. } x}{\text{sec. } x} = \frac{\text{cosin. } x}{\text{sin. } x} : \frac{1}{\text{cosin. } x} = \frac{1}{\text{sin. } x},$$

welches auch unmittelbar aus der Proportion

$$\text{Sin. } x : 1 = 1 : \text{cosec. } x$$ fließet.

43) Satz. Aus Sinus und Cosinus zweyer Winkel den Sinus und Cosinus der Summe der Winkel zu finden. Beyde Winkel sowohl als ihre Summe seyen kleiner als 90°.

cd bd ce ef nebst dem Halbmesser = 1 Fig. 13 Trigon. sind gegeben, man sucht cg, fg.

Die beyden gegebenen Winkel mögen x, y heißen. Die Dreyecke fhe, chg, cbd sind ähnlich. Dieß giebt folgende Proportionen:

$$\begin{aligned} cd &: bd = fe : he \\ cd &: cb = fe : fh \\ ch &= ce - eh \\ cb &: cd = ch : cg \\ cb &: bd = gh : hg \\ hg &+ fh = fg \end{aligned}$$

Man setze für die bekannten Linien die Sinusse und Cosinusse der gegebenen Winkel, so hat man

$$he = \frac{bd \cdot fe}{cd} = \frac{\text{sin. } x \cdot \text{sin. } y}{\text{cosin. } x}$$

$$fh = \frac{cb \cdot fe}{cd} = \frac{1 \cdot \text{sin. } y}{\text{cosin. } x}$$

$$ch = \text{cosin. } y - \frac{\text{sin. } x \text{ . sin. } y}{\text{cosin. } x} =$$

$$= \frac{\text{cosin. } x \text{ . cosin. } y - \text{sin. } x \text{ . sin. } y}{\text{cosin. } x}$$

$$cg = \text{cosin. } (x + y) = \frac{cd \text{ . } ch}{cb} =$$

$$= \text{cosin. } x \text{ . } \frac{\text{cosin. } x \text{ . cosin. } y - \text{sin. } x \text{ . sin. } y}{\text{cosin. } x} =$$

$$= \frac{\text{cosin. } x \text{ . cosin. } y - \text{sin. } x \text{ . sin. } y}{1}$$

$$hg = \frac{bd \text{ . } ch}{cb} =$$

$$= \text{sin. } x \text{ , } \frac{(\text{cos. } x \text{ . cos. } y - \text{sin. } x \text{ . sin. } y)}{\text{cosin. } x} =$$

$$= \text{sin. } x \text{ . cosin. } y - \frac{\text{sin. } x \text{ sin. } y}{\text{cosin. } x}$$

$$fg = \text{sin. } (x + y) = fh + hg =$$

$$= \frac{\text{sin. } y \text{ . } 1}{\text{cos. } x} + \text{sin. } x \text{ . cosin. } y - \frac{\text{sin } x^2 \text{ . sin. } y}{\text{cosin. } x} =$$

$$= \frac{\text{sin. } y}{\text{cosin. } x} \text{ . } (1 - \text{sin. } x^2) + \text{sin. } x \text{ cosin. } y =$$

$$= \frac{\text{sin. } y}{\text{cosin. } x} \text{ . cosin. } x^2 + \text{sin. } x \text{ . cosin. } y =$$

$$= \text{sin. } y \text{ . cosin. } x + \text{sin. } x \text{ cosin. } y.$$

Diese Sätze mit Worten ausgedruckt heißen: Das Produkt der Cosinusse weniger dem Produkte der Sinusse giebt den Cosinus der Summe; und der Sinus des einen mit dem Cosinus des andern + Sinus des ersten mit dem Cosinus des andern Winkels multiplicirt, giebt den Sinus der Summe.

44) Satz. Man setze $x = y$ im vorhergehenden Paragraph, so findet man den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels aus dem Sinus und Cosinus des einfachen:

$$\text{sin. } 2x = \text{sin. } x \,.\, \text{cosin. } x + \text{sin. } x \,\text{cosin. } x = 2 \text{ sin. } x \,.\, \text{cos. } x.$$

$$\text{cosin. } 2x = \text{cosin. } x^2 - \text{sin. } x^2 = \text{cosin. } x^2 - (1 - \text{cosin. } x^2) = 2 \,\text{cosin. } x^2 - 1.$$

45) Satz. Den Sinus und Cosinus des Unterschiedes zweyer Winkel zu finden. Man sehe in den Proportionen (43) cg, fg als bekannt an, und suche ce, fe.

Dieß giebt $ch = \frac{cg \,.\, cb}{cd}$

$x + y$ setze man $= z$

$$ch = \frac{\text{cosin. } z \,.\, 1}{\text{cosin. } x}$$

$$hg = \frac{bd \,.\, ch}{cb} = \frac{\text{sin. } x}{1} \,.\, \frac{\text{cosin. } z \,.\, 1}{\text{cosin. } x} = \frac{\text{sin. } x \,.\, \text{cosin. } z}{\text{cosin. } x}$$

$$fg = fg - hg = \text{sin. } z - \frac{\text{sin. } x \,.\, \text{cos. } z}{\text{cosin. } x} = \frac{\text{sin. } z \,.\, \text{cos. } x - \text{sin. } x \,.\, \text{cosin. } z}{\text{cosin } x}$$

$$fe = \frac{cd \,.\, fh}{cb} = \text{cos. } x \,.\, \frac{\text{sin. } z \,\text{cos. } x - \text{sin. } x \,\text{cos. } z}{\text{cosin. } x} = \frac{\text{sin. } z \,\text{cos. } x - \text{sin. } x \,.\, \text{cos. } z = \text{sin. } y = \text{sin. } (z - x)}{1}$$

$$he = \frac{bd \,.\, fe}{cd} = \frac{\text{sin. } x \,.\, \text{sin. } y}{\text{cosin. } x}$$

$$ce = ch + he = \frac{\text{cosin. } z \cdot 1}{\text{cosin. } x} + \frac{\text{sin. } x \cdot \text{sin. } y}{\text{cosin. } x} =$$

$$\frac{\text{cosin. } z \cdot 1}{\text{cosin. } x} + \frac{\text{sin. } x\,(\text{sin. } z \text{ cos. } x - \text{sin. } x \text{ cos. } z)}{\text{cosin. } x} =$$

$$\frac{\text{cosin. } z \cdot 1 + \text{sin. } x \text{ sin. } z \text{ cos. } x - \text{sin. } x^2 \cdot \text{cos. } z}{\text{cosin. } x} =$$

$$\frac{\text{cosin. } z\,(1 - \text{sin. } x^2)}{\text{cosin. } x} + \text{sin. } x \cdot \text{sin. } z =$$

$$\frac{\text{cosin. } z \cdot \text{cosin. } x^2}{\text{cosin. } x} + \text{sin. } x \cdot \text{sin. } z =$$

$$\text{cosin. } z \cdot \text{cosin. } x + \text{sin. } z \cdot \text{sin. } x =$$

$$\text{cosin. } y = \text{cosin. } (z - x.)$$

46) Satz. Die Tangenten der Summe und des Unterschiedes zweyer Winkel zu finden

Nach (42) ist $\text{tang.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cosin.}}$. Folglich hat man für

$$\text{tang. } (x + y) = \frac{\text{sin. } (x + y)}{\text{cosin. } (x + y)} =$$

$$\frac{\text{sin. } y \cdot \text{cosin. } x + \text{sin. } x \cdot \text{cosin. } y}{\text{cosin. } x \cdot \text{cosin. } y - \text{sin. } x \text{ sin. } y}$$

Man dividire Zähler und Nenner mit cosin. x. cosin. y, so erhält man

$$\frac{\frac{\text{sin. } y}{\text{cos. } y} + \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}}{\frac{\text{cosin. } x \cdot \text{cosin. } y}{\text{cosin. } x \cdot \text{cosin. } y} - \frac{\text{sin. } x \cdot \text{sin. } y}{\text{cosin. } x \text{ cosin. } y}} =$$

$$\frac{\text{tang. } y + \text{tang. } x}{1 - \text{tang. } x \cdot \text{tang. } y}$$

Für die Tangente des Unterschiedes hat man

$$\text{tang. } z - x = \frac{\text{sin. } (z - x)}{\text{cosin. } (z - x)} =$$

$$\frac{\text{sin. } z \text{ cosin. } x - \text{sin. } x \text{ . cosin } z}{\text{cosin. } z \text{ . cosin. } x + \text{sin, } z \text{ . sin. } x.}$$

Zähler und Nenner mit cos. z . cos. x dividiret giebt

$$\frac{\frac{\text{sin. } z \text{ . cosin. } x}{\text{cosin. } z \text{ cosin. } x} - \frac{\text{sin. } x \text{ . cosin. } z}{\text{cosin. } z \text{ . cosin. } x}}{\frac{\text{cosin. } z \text{ cosin. } x}{\text{cosin. } z \text{ . cosin, } x} + \frac{\text{sin. } z \text{ . sin. } x}{\text{cosin. } z \text{ . cosin. } x}} =$$

$$\frac{\text{tang. } z - \text{tang. } x}{1 + \text{tang. } z \text{ tang. } x}$$

47)-Satz. Um die Cotangente der Summe und des Unterschiedes zweyer Winkel zu finden, darf man die Ausdrücke für die Tangente der Summe und des Unterschiedes nur umkehren, weil nach (42) cotang. $= \frac{1}{\text{tang.}} = \frac{\text{cosin.}}{\text{sin.}}$ ist. Also ist

$$\text{cotang. } (x + y) = \frac{1 - \text{tang. a . tang. y}}{\text{tang. z} - \text{tang. x}}$$

$$\text{cotang. } (z - x) = \frac{1 + \text{tang. z . tang. x}}{\text{tang. z} - \text{tang. x.}}$$

48) Satz. Die Secante der Summe und des Unterschiedes zweyer Winkel zu finden.

Vermöge 42 ist $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cosin}}$ also

$$\text{sec. } (x + y) = \frac{1}{\text{cosin } (x + y)} =$$

$$\frac{1}{\text{cos. } x \text{ . cosin } y - \text{sin } x \text{ . sin } y}$$

$$\text{sec.}\,(z - x) = \frac{1}{\text{cosin}\,(z - x)} = \frac{1}{\text{cosin}\,z\,\text{cos}\,x + \text{sin}\,z\,.\,\text{sin}\,x}$$

Man dividire Zähler und Nenner in beiden Ausdrücken mit dem ersten Gliede des Nenners, so erhält man für

$$\text{sec.}\,(x + y) = \frac{1}{\text{cos}\,x\,.\,\text{cos}\,y} = \frac{}{1 - \frac{\text{sin}\,x\,\text{sin}\,y}{\text{cosin}\,x\,.\,\text{cos}\,y}} = \frac{\text{sec.}\,x\,.\,\text{sec}\,y}{1 - \text{tang}\,x\,.\,\text{tang}\,y}$$

für $\text{sec.}\,(z - x) = \frac{1}{\frac{\text{cos.}\,z\,.\,\text{cos}\,x}{1 - \frac{\text{sin}\,z\,.\,\text{sin}\,x}{\text{cos}\,z.\,\text{cos}\,x}}} = \frac{\text{sec.}\,z\,\text{sec.}\,x}{1 - \text{tang}\,z\,.\,\text{tang}\,x}$

49) Satz. Die Cosecante der Summe und des Unterschiedes zweyer Winkel zu finden, schreibe man in den Ausdrücken $\frac{1}{\text{sin}\,(x + y)}$ und $\frac{1}{\text{sin}\,(z - x)}$ für die Nenner ihre Werthe, so erhält man

$$\text{cosec.}\,x + y = \frac{1}{\text{sin.}\,x\,\text{cos.}\,y + \text{cosin.}\,x\,.\,\text{sin.}\,y} = \frac{1}{\frac{\text{sin}\,x\,\text{cosin}\,y}{1 + \frac{\text{cosin}\,x\,\text{sin}\,y}{\text{sin}\,x.\,\text{cosin}\,y}}} = \frac{\text{cosec}\,x\,.\,\text{sec}\,y}{1 + \text{cotang}\,x\,.\,\text{tang}\,y}$$

wenn

wenn man in dem Ausdruck für cosec x + y Zähler und Nenner mit sin x cosin y dividiret.

$$\text{cosec}\,(z - x) = \frac{1}{\sin z \cos x - \sin x \cos z} =$$

$$\frac{\frac{1}{\sin z \cos x}}{1 - \frac{\sin x \cos z}{\cos x \sin z}} = \frac{\text{cosec}\, z \,.\, \sec x}{1 - \text{tang}\, x \,.\, \text{cotang}\, z}$$

50) Satz. Aus 46. 47. 48. 49. findet man die Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante des doppelten Winkels, wenn man x = y setzt

$$\text{tang}\,(2x) = \frac{2\,\text{tang}\, x}{1 - \text{tang}\,.\, x^2}$$

$$\text{cotang}\, 2x = \frac{1 - \text{tang}\, x^2}{2\,\text{tang}\,.\, x}$$

$$\sec .\,(2x) = \frac{\sec x^2}{1 - \text{tang}\, x^2}$$

$$\text{cosec}\, 2x = \frac{\text{cosec}\, x \,.\, \sec x}{1 + \text{cotang}\, x \,.\, \text{tang}\, x}$$

51) Satz. Kommen in den Aufgaben 43—50 Winkel vor, welche größer als 90° sind, so ändert sich in den Ausdrücken nichts als die Zeichen. Indem man für die Cosinusse, Tangenten und Secanten von stumpfen Winkeln die Zeichen in die entgegen gesetzte verwandelt nach Trigonom. (4. 5 Satz).

52) Satz. In jedem Dreyeck aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden ac, cb und ∠c Trig. Fig. 14 seyen gegeben, ab gesucht; ac heiße = a, cb = b, ab = z. Man fälle von a auf cb das Perpendikel ae = x, ce heiße y, so hat man in dem rechtwinkelichten Drey-

eck ace, $ae = x = a \sin c$, $ce = a \cos c$, denn es ist

$1 : \sin c = a : ae$

$1 : \cos c = a : ce$

folglich $eb = cb - ce = b - a \cos c$

und $ab = \sqrt{ae^2 + be^2} =$

$\sqrt{a^2 \sin c^2 + (b - a \cos c)^2} =$

$\sqrt{a^2 \sin c^2 + b^2 - 2ab \cos c + a^2 \cos c^2}$

Wenn man das Quadrat des zweyten Gliedes ausrechnet. Es ist aber

$a^2 \sin c^2 + a^2 \cos c^2 =$

$a^2 (\sin c^2 + \cos c^2) = a^2 (1^2) = a^2$,

folglich

$ab = z = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos c}$

Wäre $< c$ stumpf, so fiele das Perpendikel df außerhalb dem Dreyeck, und man hätte

$db^2 = df^2 + fb^2 = df^2 + (cb + fc)^2$; df wie vorhin $a \sin c$, wenn $dcf = c$, $fc = a \cos c$ folglich $db = \sqrt{a^2 \sin c^2 + (b + a \cos c)^2} = \sqrt{a^2 \sin c^2 + b^2 + 2ab \cos c + a^2 \cos c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos c}$.

Eben das würde man erhalten haben, wenn man, in dem vorhin gefundnen Ausdruck für z, $\cos c$ verneint genommen hätte, wenn c den stumpfen Winkel bedeutet. Dieß zeigt, wie man sich zuweilen eine doppelte Rechnung durch die Betrachtung der zu den trigonometrischen Linien gehörigen Zeichen ersparen könne.

Die Formel

$db^2 = z^2 = a^2 + b^2 \mp 2ab \cos c^2$ druckt folgenden geometrischen Satz aus.

In jedem Dreyeck (acb, dcb) ist das Quadrat der dem gegebenen Winkel gegen überstehenden Seite, gleich der Summe der Quadrate der anliegenden Sei-

ten $\mp$ dem doppelten Rechteck. Aus den beiden Seiten in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels. Wenn der eingeschlossene Winkel ein Rechter ist, so fließet aus diesem allgemeinen Satz der pythagoreische Lehrsatz, weil in diesem Fall cosin $c = o$ also $2ab \cos c = o$ ist.

53. Satz. Aus den drey Seiten eines Dreyecks seinen Inhalt zu berechnen. Die Seite cb welche im vorhergehenden Paragraph z hieß, soll jetzt c und $\sphericalangle c$, C heißen, so hat man vermöge (52.)

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2ab \cos C$$

Man sehe cosin. C als gesucht an, so folgt

$$\mp 2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\mp \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

daher $\sin C^2 = 1 - \cos C^2 =$

$$1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2.$$ (Die doppelten Zeichen von cosin C fallen im Quadrat weg, weil sowohl $+$ als $-$ cos. $C + \cos C^2$ giebt)

$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}$$

Der Inhalt des Dreyecks ist

$$= \frac{bx}{2} = \frac{ba \sin C}{2} =$$

$$\frac{ba}{2} \sin C = \frac{ba}{2} \sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}$$

Aus dem Nenner die Wurzel ausgezogen giebt 2 a b folglich den Inhalt des Dreyecks =

$$\frac{ba}{4ab} \cdot \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4}$$

Man kann diese Formel zur Berechnung mit Logarithmen bequemer so ausdrücken

$$\frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c)(a+c+b) \cdot (b+c-a)}}{4}$$

Daß beyde Ausdrücke einerley geben, erhellet, wenn man die Multiplication des Zählers wirklich ausführet. Beyspiel:

a = 100, b = 150, c = 200 giebt den Inhalt $\frac{\sqrt{450 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 250}}{4}$

log.	450 =	2, 6532125
log.	50 =	1, 6989700
log.	150 =	2, 1760913
log.	250 =	2, 3979400
	Summe	8, 9262138
	Hälfte =	4, 4631069

gehöret zur Zahl 29047 dividirt durch 4 giebt den Inhalt 7261,7.

54) Satz. Zu finden, wie Winkel und Seite, die in einem Dreyeck einander gegen über stehen, sich wechselseitig ändern.

Aus (52) hat man die dem Winkel c gegen über stehende Seite $ba = a^2 + b^2 \mp 2ab \operatorname{cosin.} c$.

Es wachse c um γ, indeß ca die Lage ca' bekommt, ca' sey = ca, man sucht ba'

$$ba' = a^2 + b^2 \mp 2ab \operatorname{cosin} (c + \gamma)$$

eins vom andern abgezogen, giebt die Aenderung der Seite

$$\mp 2\,a\,b\,\text{cosin}\,(c+\gamma) - (\mp 2\,a\,b\,\text{cosin}\,c)$$

Wenn man nur auf die Größe der Aenderung sieht, so lasse man die doppelten Zeichen weg, und rechne cosin. $(c+\gamma)$ aus, dieß giebt für die Aenderung

$$2\,a\,b\,(\text{cosin.}\,c\,.\,\text{cosin.}\,\gamma - \text{sin.}\,c\,.\,\text{sin.}\,\gamma) - 2ab\,\text{cosin.}\,c.$$

Wenn die Aenderung des Winkels nur klein ist, so ist Sin. γ ein kleiner Bruch, und das Prodnkt Sin. c . Sin. γ noch kleiner, weil das Produkt zweyer eigentlicher Brüche kleiner als jeder Factor ist. Man lasse es weg, so erhält man für die Aenderung der Seite

$$2\,a\,b\,(\text{cosin.}\,c\,.\,\text{cosin.}\,\gamma) - 2\,a\,b\,\text{cosin.}\,c =$$

$$2\,a\,b\,\text{cosin.}\,c\,(1 - \text{cosin.}\,\gamma) =$$

$$2\,a\,b\,\text{cosin.}\,c\,(\text{sin. verſ.}\,\gamma).$$

Aus dieser Formel folgt, daß bey einerley Aenderung des Winkels die Aenderung der Seite größer ist, wenn $< c$ klein, als wenn er groß ist, weil cosin. c hiernach zu- oder abnimmt.

Beyspiel:

Es sey $a = b = 1000$, $c = 60°$, $\gamma = 5'$ giebt für die Aenderung der Seite $=$

$$2\,1000^2\,\text{cosin.}\,60°\,(\text{sin. verſ.}\,5') =$$

$$2 \cdot 1000^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}0000011 = 1{,}1.$$

Wäre $c = 20°$ und alles übrige, wie vorhin, so hätte man die Aenderung der Seite $=$

$$2 \cdot 1000^2 \cdot \text{cosin.}\,20°\ \text{sin. verſ.}\,5 = 2{,}067\ldots$$

beynahe noch einmal so groß wie vorhin.

Dieß zeigt, warum man in der ausübenden Meßkunst sehr spitzige Winkel vermeiden müsse. Die Fehler, welche bey ihrer Bestimmung begangen werden, haben einen desto größern Einfluß auf die Seiten der Figuren, und also auf die Figuren selbst, je spitzer die Winkel sind. Auch zeigt dieses Beyspiel, wie man mit Hülfe der analytischen Trigonometrie die Größe der Fehler, welche bey aller Vorsicht, wegen Unvollkommenheit der Werkzeuge, und unsrer Sinnen begangen werden, schätzen und in Rechnung bringen könne. Eine Wissenschaft, ohne welche man es in der Ausübung nie weit bringen wird.

55) Satz. Aus einem Winkel, dessen Schenkel gegen den Horizont geneigt sind, den horizontalen Winkel zu bestimmen.

1ter Fall.: Wenn nur ein Schenkel geneigt, der andere horizontal ist. Der geneigte Schenkel sey ac (Fig. 15. Trigon.), man fälle von a das Loth ad auf die horizontale Ebene, und das Perpendikel ae auf cb in der geneigten Ebene. Der horizontale Winkel dcb, welcher gesucht wird, heiße = x, der geneigte acb = c, die Neigung des Schenkels ac, oder acd = n, so hat man

$$1 : \sin. n = ac : ad = ac . \sin. n$$

$$1 : \cos. n = ac : cd = ac . \cos. n$$

< aed = Neigung der Ebene acb gegen die horizontale, folglich < ced = R (Stereom. 78.) und im Dreyecke cde

$$1 : \cos. x = cd : ce$$

giebt $ce = cd \cos. x$

$ce = ac \cos. n . \cos. x$

ferner im Dreyecke a c e

$$1 : \text{cosin. } c = ac : ce$$

giebt $ce = ac \cdot \text{cosin. } c,$

beyde Werthe von c e gleich gesetzt, erhält man

$$ac \cdot \text{cosin. } c = ac \cdot \text{cosin. } n \cdot \text{cosin. } x$$

daher $\text{cosin. } c = \text{cosin. } n \cdot \text{cosin. } x$

$$\text{cosin. } x = \frac{\text{cosin. } c}{\text{cosin. } n}$$

Wenn c a lothrecht über c b liegt, so fällt c d auf c b und Winkel x ist = o. Dieß giebt auch die Formel, denn in diesem Fall ist n = c, folglich

$$\text{cosin. } x = \frac{\text{cosin. } c}{\text{cosin. } c} = 1 \quad \text{oder } x = o .$$

Da cosin. c durch einen Cosinus, d. i. durch einen eigentlichen Bruch dividirt, cosin. x giebt, so ist cosin. x jederzeit größer als cosin. c, folglich Winkel x kleiner als c, so lange beyde Winkel spitz sind, umgekehrt, wenn sie stumpf sind.

Beyspiel:

$$c = 70° \quad n = 60°$$

giebt $\text{cosin. } x = \frac{\text{cosin. } 70°}{\text{cosin. } 60°} = \frac{\text{cosin. } 70°}{\text{sin. } 30°}$

$$\frac{\text{cosin. } 70°}{\frac{1}{2}} = 2\,\text{cosin. } 70° = 0{,}6840402 = \text{cosin. } 43°9'$$

2ter Fall: Wenn beyde Schenkel geneigt sind.

Man fälle von einem willkührlichen Punct c (Fig. 16.) des einen Schenkels c a ein Perpendikel c b auf den andern Schenkel, von c und b fälle man die Lothe c e, b d auf die horizontale Ebene, so ist e a d der gesuchte horizontale Winkel, er heiße x, der geneigte

Winkel cab = a, cae oder die Neigung von ac = n, bad oder die Neigung von ab = m.

Im Dreyeck cae ist

1 : sin. n = ac : ce = ac . sin. n

1 : cosin. n = ac : ae = ac cosin. n

im Dreyeck abd

1 : sin. m = ab : bd = ab sin. m

1 : cos. m = ab : ad = ab cos. m

im Dreyeck abc

1 : sin. a = ac : bc = ac sin. a

1 : cos. a = ac : ab = ac cos. a

man ziehe bf parallel mit de, so ist bey f ein rechter Winkel und $bf^2 = de^2 =$

$bc^2 - cf^2 = bc^2 - (ce - bd)^2$

Man schreibe für bc, ce, bd die vorhin gefundenen Werthe, so erhält man für

$de^2 = ac^2 \sin. a^2 - (ac \sin. n - ab \sin. m)^2$

und weil ab = ac cosin. a

$de^2 = ac^2 \sin. a^2 - (ac \sin. n - ac \cos. a \sin. m)^2$

$= ac^2 \sin. a^2 - ac^2 (\sin. n - \text{cosin. } a \sin. m)^2$

den eingeschlossenen Factor quadriret giebt

$\sin. n^2 - 2 \sin. n. \cos. a . \sin. m + \cos. a^2 \sin. m^2$

I. also $de^2 = ac^2 \sin. a^2 - ac^2 (\sin. n^2$

$- 2 \sin. n \text{ cosin. } a . \sin. m + \text{cosin. } a^2 \sin. m^2)$.

Im Dreyeck dae hat man

II. nach (53) $de^2 = ae^2 + ad^2 - 2ae . ad \cos. x =$

$ac^2 \text{ cosin. } n^2 + ac^2 \text{ cosin. } a^2 \text{ cosin. } m^2 -$

$2ac \text{ cosin. } n . ac \text{ cosiin. } a . \text{cosin, } m \text{ cosin. } x.$

Man setze beyde Werthe I. und II. von de^2 gleich, so erhält man

$$ac^2 (\text{sin. } a^2 - \text{sin. } n^2 + 2 \text{ sin. } n \text{ cosin. } a \text{ sin. } m -$$
$$\text{cosin. } a^2 \text{ sin. } m^2) =$$
$$ac^2 (\text{cosin. } n^2 + \text{cosin. } a^2 \text{ cosin. } m^2 -$$
$$2 \text{ cosin. } n \text{ cosin. } a \text{ cosin. } m \text{ cosin. } x)$$

mit ac^2 auf beyden Seiten der Gleichung dividiret, und das Glied, welches die unbekannte Größe enthält, mit dem Zeichen + auf die eine, alle übrigen Glieder auf die andere Seite der Gleichung gebracht giebt

$$2 \text{ cosin. } n. \text{ cosin. } a . \text{ cosin. } m \text{ cosin. } x =$$
$$\text{cosin. } n^2 + \text{cos. } a^2 \text{ cos. } m^2 - \text{sin. } a^2 + \text{sin. } n^2 -$$
$$2 \text{ sin. } n \text{ cosin. } a \text{ sin. } m + \text{cosin. } a^2 \text{ sin. } m^2$$

für $\text{cosin. } n^2 + \text{sin. } n^2 = 1^2$ und
für $\text{cosin. } a^2 . \text{ cosin. } m^2 + \text{cosin. } a^2 \text{ sin. } m^2 =$
$\text{cosin. } a^2 (\text{cosin. } m^2 + \text{sin. } m^2) = \text{cos. } a^2 (1^2)$
schreibe man diese Werthe, so erhält man für das, was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht

$$1^2 - \text{sin. } a^2 + \text{cos. } a^2 - 2 \text{ sin. n. cos. a sin. m} =$$
$$2 \text{ cosin. } a^2 - 2 \text{ sin. n cosin. a . sin. m,}$$

weil $1^2 - \text{sin. } a^2 = \text{cosin. } a^2$, so folgt hieraus endlich

$$\text{cosin. } x = \frac{2 \text{ cos. } a^2 - 2 \text{ sin. n cosin. a sin. m}}{2 \text{ cosin. n cosin. a cosin. m}}$$

Zähler und Nenner mit 2 cosin. a dividiret

$$\text{cosin. } x = \frac{\text{cosin. a} - \text{sin. n . sin. m.}}{\text{cosin. n cosin. m.}}$$

56) Anmerkung. Wenn gleich die Rechnung des zweyten Falls etwas weitläuftig ist, so ist doch der Ausdruck für cosin. x ziemlich einfach und leicht zu berechnen. Er begreift den ersten Fall unter sich, wenn man $m = o$, also sin. $m = o$ und cosin. $m = 1$ setzt, da sich die Formel für cos. x in $\frac{\text{cosin. a} - o}{\text{cosin. n} \cdot 1}$ die 55 1ster Fall gefundene verwandelt.

Die Rechnung kann Anfängern zur Uebung dienen, da bey ihr viele der vorher gegebenen Regeln angewendet werden müssen. Der Satz (55) ist in der practischen Geometrie von großer Wichtigkeit, und die Ergänzung zu dem, was Geom. (131) davon gesagt worden ist.

Verzeichniß

einiger der vorzüglichsten

Schriften über die reine Mathematik.

Böhm's Vorlesungen über die reine Mathematik, zum Gebrauch für Lehrer und Lernende, besonders auf Schulen. 1r Thl. Arithmetik. 8. Frankf. 1795.

Dieses Buch ist wegen seiner Richtigkeit, und seinem angenehmen und faßlichen Vortrag vorzüglich empfehlenswerth.

Euklid's Elemente, ins deutsche übersetzt von Lorenz. Halle 1787. gr. 8.

Sind wegen des streng geometrischen Vortrags sehr zu empfehlen.

Wolfs Elementa Matheseos universae T. I–V. 4. Hafae Magd. 1713, 2te Ausgabe 1730–1741. 3te 1742.

Desselben Anfangsgründe der mathem. Wissenschaften 1–4r Thl. Halle 1710. 8.

Ist wiederholt aufgelegt worden. Der 1ste Theil von beiden Werken enthält die reine Mathematik. 1r Thl.

— Auszug aus den Anfangsgründen, zum Gebrauch für Vorlesungen.

Wolfs Schriften sind sehr faßlich, jetzt aber schon etwas alt, und zuweilen nicht vollständig genug.

Segners Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie, 2te Aufl. Halle 1773.

Desselben Vorlesungen über die Arithmet. und Geometrie zu eignem Unterrichte. Lemgo 1747. 4.

Kästners Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv; die neueste Ausgabe ist von 1786.

Eine gedrängte Kürze, Vollständigkeit der Sachen und der Litteratur zeichnen dieses Lehrbuch vor allen übrigen aus.

Hiermit sind zu verbinden:

Kästners Fortsetzung der Arithmetik. Göttingen 1786.

Desselben geometrische Abhandlungen, 1ste Samml. Gött. 1790. 2te Samml. 1791.

Für Anfänger sind empfehlenswerth:

Kempe, Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik u. s. w. 1–3r Thl. Altenburg 1781. 8.

Clemm's erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften, neueste Ausgabe. Stuttgardt 1777.

Desselben mathematisches Lehrbuch, 1r und 2r Theil. Stuttg. 1768.

Karsten's Lehrbegriff der gesammten Mathematik 1r–8r Theil. Greifswalde 8.

Die 2te Ausgabe fängt 1782 an, und enthält auch die höhere Mathematik. Ein sehr vollständiges Werk; Schade! daß die astronomischen Wissenschaften fehlen, und der Vortrag des Verfassers oft zu gedehnt ist. Kürzer, und eben daher vorzüglicher, sind

Desselben Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaft. 1r–3r Theil. Greifswald 1780.

Von diesem Buch ist ein Auszug in einem Theil zu haben.

Büsch, Versuch einer Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des menschlichen Lebens. Hamburg 8. 1r–4r Theil 1790–1796. neuste Ausgabe.

Das Werk übertrift an Faßlichkeit alle übrigen deutschen Lehrbücher der Mathematik, und entspricht seinem Titel vollkommen.

Desselben Encyclopädie der mathemat. Wissenschaften

Dienet zur allgemeinen Uebersicht der Wissenschaft sowohl als ihrer Geschichte und Litteratur. Die neue Ausgabe ist von 1795.

Häselers Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie zum eignen Unterricht. Lemgo 8. 1776–77.

Klügels Encyclopädie, oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse. 2te Ausgabe, Berlin und Stettin 1792.

Die reine Mathematik macht des 2ten Bandes 1ste Abtheilung aus, und ist auch besonders zu haben unter dem Titel: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie.

Lorenz, die Elemente der Mathematik, 1r 2r Theil, Leipzig 1786, neue umgearbeitete Auflage 1793.

Der Verfasser bleibt unter den neuern Schriftstellern am nächsten beym Euclid.

Schulz, Anfangsgründe der reinen Mathesis, Königsberg 1790.

J. C. Fischer's Anfangsgründe der reinen Mathematik. Jena 1792.

Practische Schriften.

1) Von der Rechenkunst.

v. Clausberg demonstrative Rechenkunst, 4r Thl. in 8. Leipz. 1732.

In den beiden ersten Theilen die theoretische, in den beiden letzten die angewandte Rechenkunst.

J. Ch. Karsten's Rechenkunst, 1ste Ausgabe. Bützow und Wismar 1775. 8.

Reimers Anweisung zur Rechenkunst. 2te Aufl. Hamburg 1776. 8.

Sehr brauchbar, zunächst für den Kaufmann.

L. Ch. de Florencourt Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenburg 1781. 4.

J. N. Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. Leipzig 1785. 8.

Ein classisches Werk für die politische Rechenkunst.

2) Von der Geometrie.

Böhm's Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, nebst zweyen Anhängen vom Nivelliren und der Markscheidekunst. Frankf. und Leipzig, 2te Ausgabe 1779. 4.

Hogrevens Anweisung zur Vermessung eines ganzen Landes. Hannover und Leipzig 1773. 8.

Helfenzrieder, Abhandlung von der Geodäsie. Ingolstadt und Augsburg 1775. 4.

Mayer's Unterricht zur practischen Geometrie, 2te verbesserte Auflage, 1r bis 4r Theil. Göttingen 1792.

Ein sehr brauchbarer Auszug aus diesem classischen Werk ist

Meinert's Anfangsgründe der Feldmeßkunst, mit 5 schwarzen und 1 illum. Kupf. gr. 8. Halle 1795.

T. Bugge Beschreibung der Ausmessungsmethode, welche bey den dänischen geographischen Carten angewendet werden. 4. Dresden 1787.

Von Schriften über die höhere Mathematik sind außer den schon angeführten Lehrbüchern von Kästner und Karsten noch insbesondere zu bemerken:

Eulers vollständige Anleitung zur Algebra. 2 Theile. Petersburg und Leipzig 1771.

Desselben vollständige Anleitung zur Differenzialrechnung; aus dem Lateinischen mit Anmerk. und Zusätzen von J. A. Chr. Michelsen.

Von diesem vortreflichen Werk sind ganz neuerlich noch zwey deutsche Ausgaben erschienen, nämlich:

Eulers vollst. Anleit. zur niedern und höhern Algebra nach de la Grange, mit Anmerkungen und Zusätzen von Z. P. Grüson, 2 Bde. gr. 8. Berlin 1796.

Desselben vollständige Anleitung zur Algebra aus dem Französ. von Kausler. Frankf. 1796.

J. Pasquich Unterricht in der mathematischen Analysis. 2 Bände. Leipzig 1790.

l'Huillier, principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. 4. maj. Tubingae 1795.

Geschichte der Mathematik.

Kästner's Geschichte der Mathematik, 1r Band. Göttingen 1796.

Litteratur.

Scheibels Anleitung zur mathematischen Bücherkenntniß.

Taf. 1

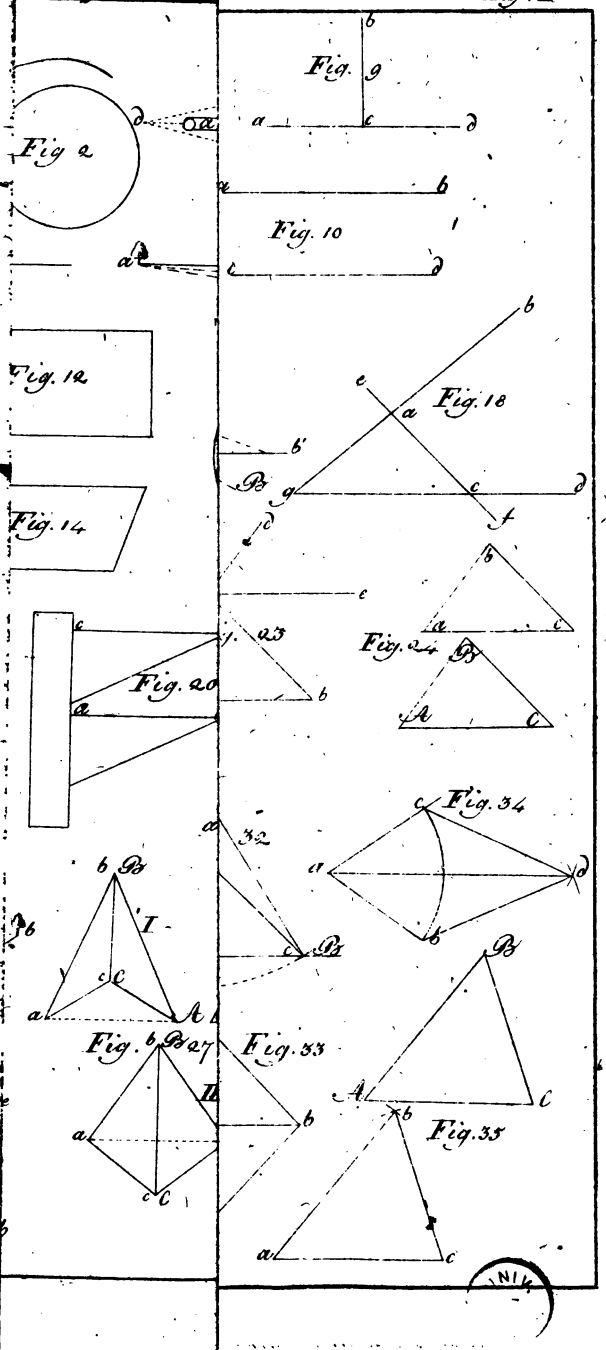


Fig. 9
Fig 2
Fig. 10
Fig. 12
Fig. 18
Fig. 14
Fig. 20
Fig. 24
Fig. 34
Fig. 32
Fig. 27
Fig. 33
Fig. 35

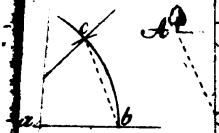
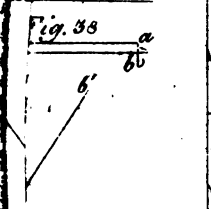


Fig. 38



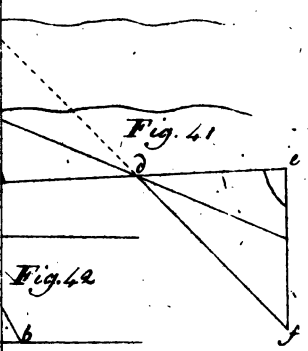


Fig. 41

Fig. 42

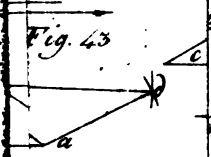


Fig. 43

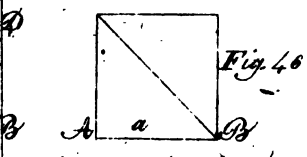


Fig. 46

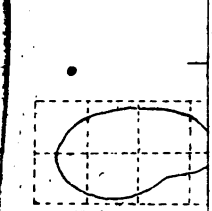


Fig. 51

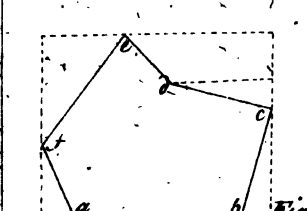


Fig. 50

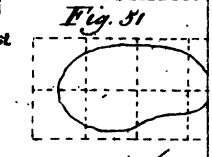


Fig. 55

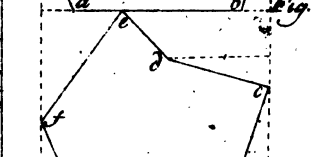
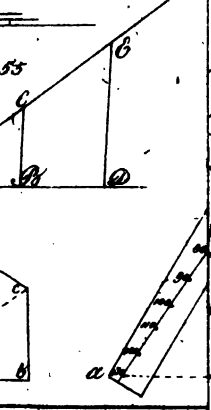


Fig. 59



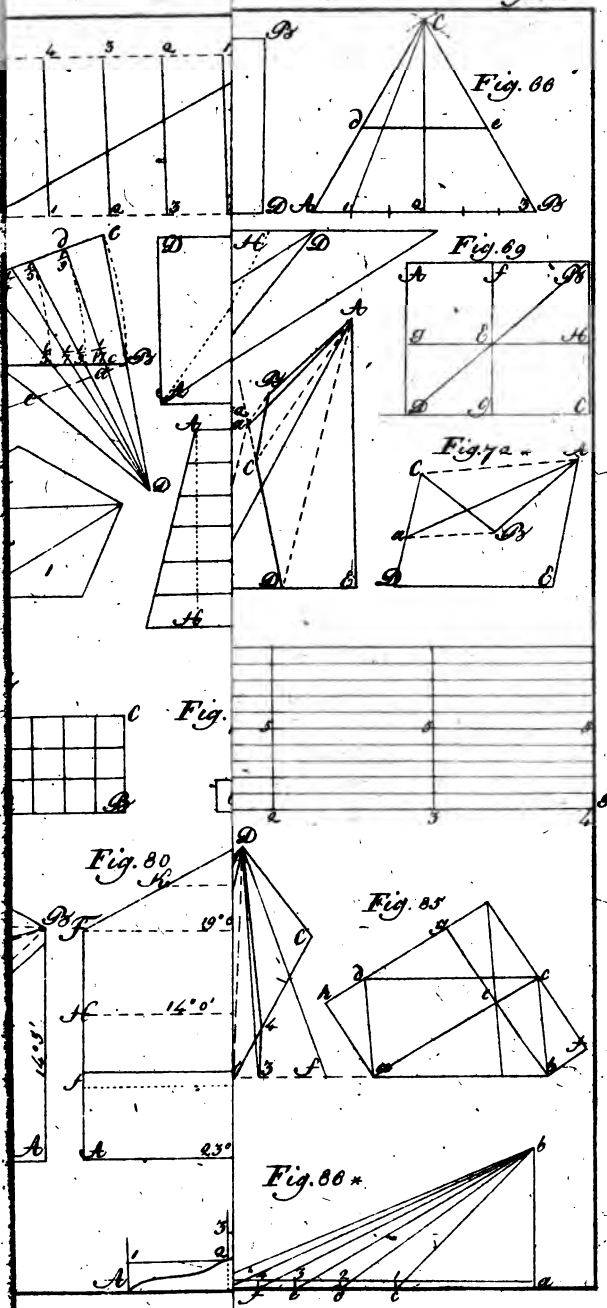


Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 80
Fig. 85
Fig. 86*
19° 0'
14° 0'
14° 5'
23°

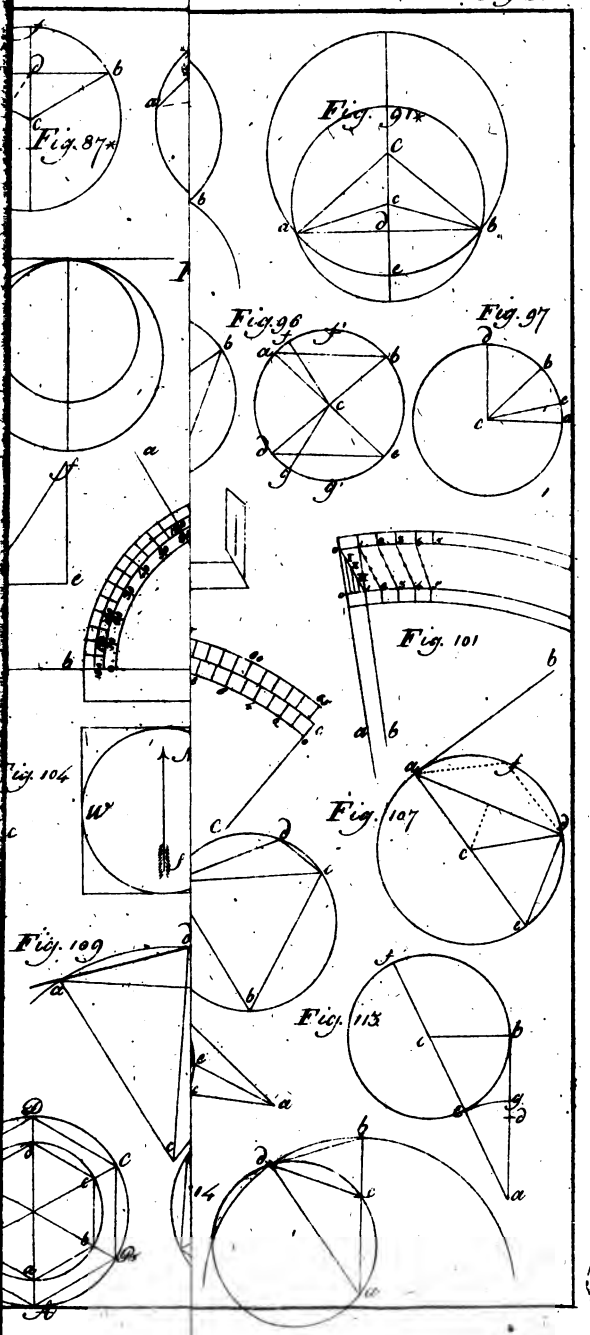


Fig. 87*
Fig. 91*
Fig. 96
Fig. 97
Fig. 101
Fig. 104
Fig. 107
Fig. 109
Fig. 113
14

Stereometrie

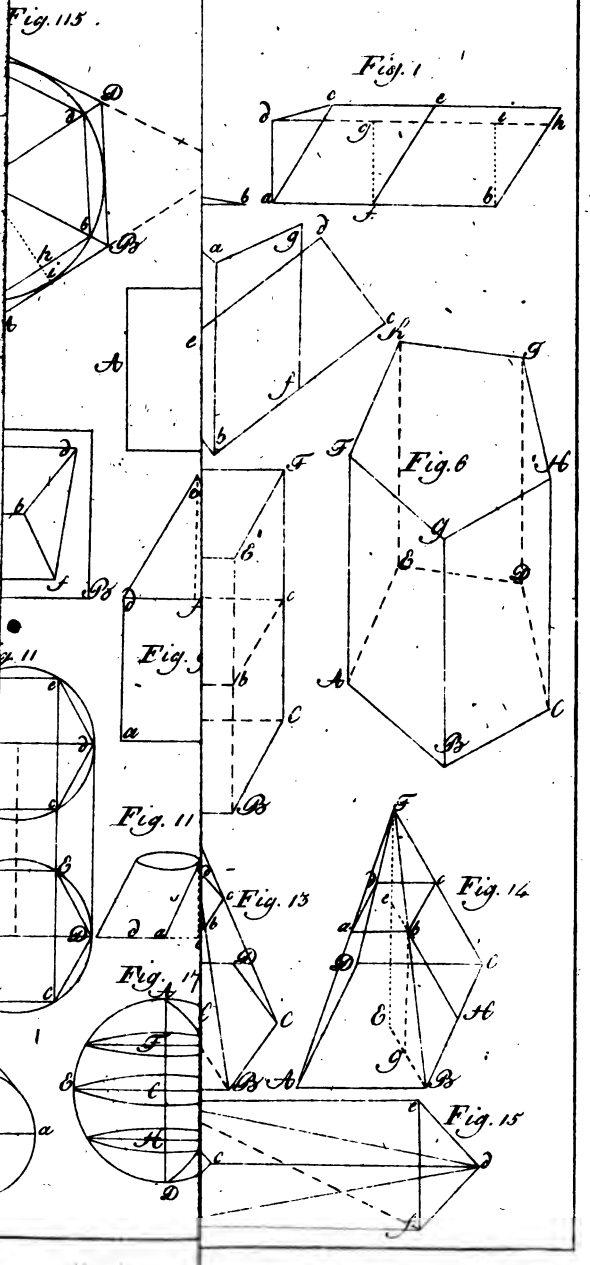
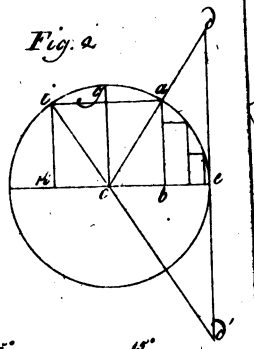
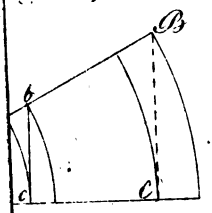
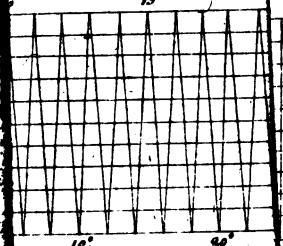
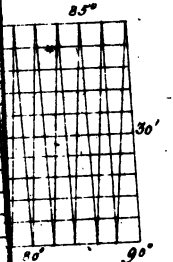


Fig. 2.









7

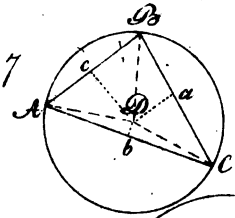


Fig. 9

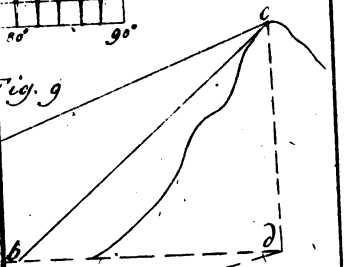


Fig. 11

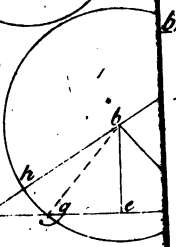
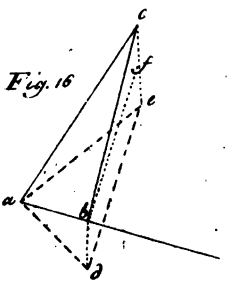
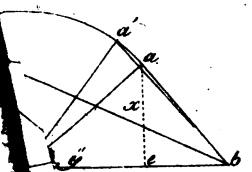


Fig. 16



4